

IVAN MOURA BELO

Desenvolvimento da Formulação Corrotacional em Elementos Finitos de Casca para a Análise Hiperelástica

Florianópolis
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Desenvolvimento da Formulação Corrotacional em Elementos Finitos de Casca para a Análise Hiperelástica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia – Área de Concentração: Análise e Projeto Mecânico.

Orientador: Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Co-orientador: William Taylor Matias Silva, Dr. Ing.

Ivan Moura Belo

Florianópolis
2009

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina

B452d Belo, Ivan Moura.
 Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos
 finitos de casca para a análise hiperelástica [tese]
 / Ivan Moura Belo ; orientador, Marcelo Krajnc Alves.
 - Florianópolis, SC, 2009.
 185 f.: il., tabs., grafs.

 Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
 Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação
 em Engenharia Mecânica.

 Inclui bibliografia

 1. Engenharia mecânica. 2. Hiperelasticidade.
 3. Elemento de casca. 4. Formulação corrotacional,
 5. Não-linearidade. I. Alves, Marcelo Krajnc.
 II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa
 de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Desenvolvimento da Formulação Corrotacional em Elementos Finitos de Casca para a Análise Hiperelástica

Ivan Moura Belo

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
sendo aprovada em sua forma final.

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Presidente

Eduardo Alberto Fancello, D. Sc.
Coordenador do POSMEC

BANCA EXAMINADORA

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.
Presidente

João Elias Abdalla Filho, Ph.D.
Relator

José Carlos Pereira, Dr.
Membro da Banca

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.
Membro da Banca

Roberto Dalledone Machado, Dr. Eng.
Membro da Banca

Dedicatória

*A minha esposa, Renata Aguiar Belo
pelo amor, apoio e compreensão.
e aos meus familiares,
por sempre estarem presentes em minha vida.*

Agradecimentos

À primeira vista, uma tese na área de Mecânica dos Sólidos Computacional parece ser algo solitário feito no computador durante as intermináveis manhãs, tardes e noites de estudo. Mas a solidão é apenas aparente. Muitas pessoas estiveram presentes nesta minha jornada acadêmica. Os primeiros parceiros foram os meus familiares: pai, mãe, irmão, tios, primos e mais recentemente, esposa... Todos torcendo pelo meu sucesso, mesmo sem entender o que tanto eu fazia lendo artigos sobre um “tal” de método dos elementos finitos. A todos vocês o meu muito obrigado!

Nesta curta jornada acadêmica fiz colegas de ofício e mais do que isso, amigos. O professor Renato Machniewscz foi um deles. Ele foi o responsável por sanar todas as dúvidas que tive e tenho em L^AT_EX. Valeu Renato! Aos professores João Elias Abdalla Filho e Roberto Dalledone Machado o meu muito obrigado. Eles se mostraram prestativos em todos os momentos de dificuldade, e não foram poucos...

Um dos primeiros passos para uma tese dar certo é a relação que se estabelece com o orientador. Quanto melhor se dá este intercâmbio melhor será o resultado. Ao meu orientador Marcelo Krajnc Alves, a palavra obrigado é pouco para expressar a minha gratidão. Ele deu total liberdade para que eu trabalhasse. Leitor atento desde os primeiros rascunhos, indicou bibliografia comentou trechos problemáticos, abriu caminhos e possibilidades. Sabendo lidar com a minha teimosia e insistência deixou o trabalho seguir o percurso que eu quis e mais importante de tudo, sempre me apoiou. Obrigado! Isso vale também ao meu co-orientador, William Taylor Matias Silva. Sempre que conseguia achar algum problema em algum algoritmo, logo vinha me expor sobre o assunto. O meu muito obrigado!

Aos amigos de GMAC, em especial, Marcelo Maldaner e Miguel Tobias Bahia valeu mesmo! Foram várias horas de estudo e viagens que foram compartilhadas. Listas de exercícios que pareciam não ter fim... O meu sincero obrigado a todos vocês!

Agradeço também à Capes e ao CNPq, órgãos financiadores do meu mestrado e doutorado, respectivamente. Sem este apoio seria impossível a dedicação à pesquisa.

E, finalmente, agradeço a Deus, por me dar saúde e inteligência necessárias para a realização desta tese.

Epígrafe

“Nem só de pão viverá o homem, mas de toda a palavra que sai da boca de Deus.”

Mateus 4:4

Resumo

Nesta tese, é proposto um elemento finito bidimensional de casca capaz de avaliar o problema da não-linearidade material (hiperelasticidade) e geométrica de uma dada estrutura, de forma precisa e acurada, submetida a grandes deslocamentos e rotações. Para isso, são utilizados elementos finitos obtidos a partir da descrição cinemática corrotacional (CR), que está baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) dos movimentos deformacionais.

Como ponto de partida, o elemento é derivado no contexto da formulação de deformação deviatória natural (ANDES), da formulação corrotacional de elemento independente (EICR) e dos métodos de Newton e do comprimento de arco proposto por Felippa e seus colaboradores. O intuito é fazer uso de um elemento finito linear de casca capaz de descrever corretamente os fenômenos físicos e adaptá-lo ao comportamento dos materiais hiperelásticos. Foi escolhida a hiperelasticidade em particular devido à certa simplicidade de suas equações constitutivas se comparadas com não-linearidades mais severas como em modelos elastoplásticos, viscoplásticos ou viscoelásticos. E, ainda, por ser um modelo versátil, pois pode ser empregado para descrever além de análises tipicamente de engenharia, problemas relacionados com bioengenharia (tecido humano).

Para avaliar, e assim, validar o elemento proposto, resultados provenientes de soluções numéricas de outros elementos de casca, tanto 2D quanto 3D encontrados na literatura, e soluções analíticas são comparados com o elemento CR. É mostrado que o modelo proposto, além de convergir rapidamente, apresenta resultados coerentes com os apresentados na literatura e em soluções analíticas.

Palavras-chave: Hiperelasticidade, elemento de casca, formulação corrotacional, não-linearidade.

Abstract

This thesis proposes a shell finite element for the nonlinear geometrical and material analysis of structures. The proposed model accounts for large displacements and rotations and employs the corotational formulation (CR) in order to describe the kinematic motion, which is decomposed into a rigid body (translational and rotational) motion and a pure deformation motion.

As starting point, the Assumed Natural Deviatoric Strain (ANDES), the Element Independent Corotational (EICR), the Newton-Raphson method and the arc-length method proposed by Felippa and co-workers are derived and used. The aim of the work is to develop a linear shell element which is capable to describe the deformation of hyperelastic materials subjected to large displacements and rotations. As a potential application one may consider the modeling of human skin behavior, an so on.

In order to investigate the of the proposed numerical procedures and to validate the hyperelastic models implemented in this thesis one solves a set of problems and compare the results with known analytical and numerical solutions presented in the literature.

Keywords: Hyperelasticity, shell element, corotational formulation, nonlinearity.

Sumário

Lista de Figuras	xviii
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxiii
Lista de Símbolos	xxvi
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Breve Histórico da Análise Não-linear via MEF	3
1.3 Histórico da Formulação Corrotacional	4
1.4 Motivações	8
1.5 Objetivos	9
1.6 A Originalidade da Tese	9
1.7 Apresentação do Trabalho	9
2 Introdução à Elasticidade Finita	11
2.1 Introdução	11
2.2 Movimento de um Corpo \mathcal{B}	11
2.2.1 Configuração do Meio Contínuo	11
2.2.2 O Campo de Deslocamentos	13
2.3 A Análise de Deformação	14
2.3.1 O Gradiente de Deformação	14
2.3.2 Tipos de Deformação	16
2.3.3 Decomposição da Deformação Homegênea	16
2.3.4 Decomposição Polar	18
2.3.5 Mudança de Volume	18
2.3.6 Relação Entre Vetores Normais	19
2.3.7 As Medidas de Deformação	20
2.3.8 Interpretação Física das Componentes de \mathbf{E}	23
2.4 Grandezas Linearizadas	25
2.4.1 Linearização do Gradiente de Deformação	25
2.4.2 Linearização das Deformações	25

2.5	Análise de Tensões	26
2.5.1	Tensor de Tensões de Cauchy	26
2.5.2	Os Tensores de Piola-Kirchhoff	29
2.5.3	Tensões no Sistema Corrotacionado	32
2.6	Equações de Equilíbrio	33
2.6.1	Equilíbrio de Translação	33
2.6.2	Equilíbrio de Rotação	35
2.7	A Hiperelasticidade ou Elasticidade de Green	37
2.7.1	Aspectos Iniciais	37
2.7.2	Descrição Matemática do Problema	37
3	A Formulação Corrotacional	41
3.1	Introdução	41
3.2	Cinemática Corrotacional	43
3.2.1	Sistema de Coordenadas	43
3.2.2	Transformações de Sistemas Coordenados	45
3.2.3	Deslocamentos de Corpo Rígido	46
3.2.4	Matrizes de Rotação	47
3.2.5	Os Graus de Liberdade	49
3.2.6	Matrizes do Elemento Independente Corrotacionado	51
3.2.7	As Translações Deformacionais	55
3.2.8	As Rotações Deformacionais	57
3.3	O Vetor de Forças Internas	58
3.4	A Matriz de Rigidez Tangente	60
3.4.1	Matriz de Rigidez Material	61
3.4.2	Matrizes de Rigidez Geométrica	61
3.4.3	Propriedades da Matriz de Rigidez Tangente	65
3.5	Exigências da Formulação EICR	66
4	O Elemento Finito Triangular de Casca EICR	69
4.1	Introdução	69
4.2	Relações Geométricas e Cinemáticas	69
4.3	Equações de Equilíbrio	74
4.3.1	A Energia Interna	74
4.3.2	Atualização dos Deslocamentos	77
4.4	Matriz de Rigidez Linear do Elemento	78
4.5	O Tensor de Projeção	81
4.6	Matriz de Rigidez Tangente do Elemento	84
5	O Modelo Hiperelástico Corrotacional	87
5.1	Introdução	87
5.2	O Potencial de Energia Livre de Helmholtz	89
5.2.1	Função Energia de Deformação	90
5.3	Princípio da Indiferença de Sistema Coordenado	91
5.4	Simetria Material	95
5.4.1	Grupos de Simetria	98
5.4.2	Consequências da Simetria Material	99

5.5	Restrições Materiais	102
5.5.1	Incompressibilidade	102
5.5.2	Semi-incompressibilidade	103
5.6	O Elemento HiperEngCR	107
5.6.1	Aspectos Iniciais	107
5.6.2	Modelo de Saint Venant-Kirchhoff	107
5.7	O Elemento HiperBioCR	110
5.7.1	Aspectos Preliminares	110
5.7.2	A Hiperelasticidade da Pele Humana	111
5.7.3	A Formulação Incremental CR	114
6	Exemplos Numéricos	121
6.1	Introdução	121
6.2	Aplicações com o HiperEngCR	122
6.2.1	<i>Patch</i> Teste	122
6.2.2	Viga em Balanço com Momento Aplicado em sua Extremidade Livre	124
6.2.3	Placa Sujeita a uma Carga Concentrada	126
6.2.4	Casca Cilíndrica com Carga Concentrada	128
6.2.5	Cilindro Engastado sob Carga Concentrada	130
6.2.6	Casca Hemisférica com Furo de 18°	132
6.3	Aplicações com o HiperBioCR	134
6.3.1	<i>Patch</i> Teste	134
6.3.2	Cobertura Esférica Submetida à Carga Concentrada	136
6.3.3	Casca Cilíndrica Estirada	138
6.3.4	Casca Esférica de Borracha Sujeita à uma Carga Concentrada	141
7	Considerações Finais	145
7.1	Introdução	145
7.2	Conclusões	146
7.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	148
	Referências Bibliográficas	149
A	Rotação Finita, Aspectos Matemáticos	159
A.1	Introdução	159
A.2	Rotação Espacial \times Plana	159
A.3	Giros	160
A.3.1	Matriz de Giro e Vetor Axial	161
A.3.2	Normalização da Matriz de Giro	161
A.3.3	Propriedades Espectrais	163
A.4	Da Matriz Giro para a Matriz Rotação	164
A.4.1	Abordagem Algébrica	165
A.4.2	Abordagem Geométrica	166
A.5	Matriz de Rotação para Diversas Parametrizações	166
A.6	A Transformada de Cayley	167
A.7	Mapa Exponencial	168
A.8	Relações de Matrizes Antissimétricas	169

A.9	O Vetor Axial	169
A.10	A Matriz $\tilde{\mathbf{S}}$	170
B	Os Projetores	171
B.1	Introdução	171
B.2	O Projetor $\tilde{\mathbf{P}}$	171
B.3	O Projetor \mathbf{H}	174
C	Método do Comprimento de Arco	177
C.1	Introdução	177
C.2	Formulação	178
C.2.1	Fase Preditora	180
C.2.2	Fase Corretora	181
	Índice Remissivo	184

Lista de Figuras

2.1	Movimento de um corpo genérico \mathcal{B} deformável.	12
2.2	Configurações de referência e deformada de corpo \mathcal{B}	13
2.3	Pontos P_0 e Q_0 separados por $d\mathbf{X}$ na configuração inicial Ω_0 que passam a ocupar P e Q na configuração deformada Ω cuja distância é $d\mathbf{x}$	14
2.4	Transformação de um elemento de volume através do mapeamento.	19
2.5	Mudança de área associada à relação entre vetores normais.	20
2.6	Interpretação física das componentes do tensor de deformação de Green, \mathbf{E}	24
2.7	Corpo genérico com diferentes condições de contorno e carregamento, cortado por um plano para explicitar o vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$	27
2.8	Elemento tetraédrico infinitesimal.	28
2.9	Cubo elementar enfatizando as componentes de tensão em coordenadas cartesianas.	29
2.10	Definição dos tensores de Piola-Kirchhoff.	30
2.11	Equilíbrio estático de um corpo genérico deformável \mathcal{B} no meio contínuo submetido às forças de corpo e de superfície.	34
2.12	Tensões em um paralelepípedo infinitesimal.	37
3.1	A descrição cinemática CR. As deformações entre as configurações corrotacionadas e deformadas foram exageradas para facilitar a visualização.	42
3.2	A cinemática bidimensional, para facilitar a visualização, de um elemento CR mostrando o movimento de um ponto genérico P	44
3.3	A cinemática bidimensional de um elemento CR enfatizando a transformação rotacional entre os sistemas coordenados.	44
3.4	A essência da descrição cinemática corrotacional através do movimento 2D de uma barra.	46
3.5	Mapeamento de um sistema coordenado para outro.	47
3.6	Conceito da configuração não equilibrada para ilustrar a derivação das matrizes EICR de elementos se movendo no espaço 3D.	52
3.7	Etapas da sequência de transformação dos graus de liberdade deformados para globais.	60
4.1	Configuração dos nós e dos graus de liberdade do elemento triangular.	69

4.2	Conceitos da descrição cinemática corrotacional enfatizando a separação dos movimentos para o elemento de casca triangular.	70
4.3	Vetores que ligam as configurações inicial e deformada do elemento de casca.	71
4.4	Transformação linear T_0 sobre o sistema base do elemento $\tilde{x} \{ \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \}$	71
4.5	Translações e rotações do elemento triangular de casca de um nó genérico i	72
5.1	Comportamento não-linear entre a relação tensão-deformação da derme.	88
5.2	Plano de simetria formado pelos eixos x e y	96
5.3	Campo de deslocamento conforme descrição cinemática CR.	115
6.1	Simple teste de esforço axial plano.	122
6.2	Configuração da estrutura deformada e indeformada ao longo da análise.	123
6.3	Comparação do deslocamento axial no nó 2 entre o modelo proposto por Toscano e Dvorkin [101] e o presente trabalho.	123
6.4	Geometria inicial para a viga em balanço submetida a um momento fletor e a discretização do problema.	124
6.5	Geometrias inicial e deformada para a viga sob momento fletor constante e a convergência das soluções.	125
6.6	Trajetoárias de equilíbrio para os deslocamentos na extremidade livre da viga.	126
6.7	Geometria da placa com a discretização do problema e as propriedades mecânicas.	126
6.8	Trajetoárias de equilíbrio para os pontos A e B da placa.	127
6.9	Configuração deformada referente ao ponto A para o primeiro e último passos de carga.	127
6.10	Propriedades física e geométrica de uma cobertura cilíndrica simplesmente apoiada e discretização do modelo.	128
6.11	Trajetoária de equilíbrio para a casca cilíndrica.	128
6.12	Estrutura deformada para $h = 6.35$ mm.	129
6.13	Geometria e discretização do problema de um cilindro submetido a uma carga concentrada em sua extremidade livre.	130
6.14	Trajetoária de equilíbrio para o deslocamento u_z	131
6.15	Configurações deformada do cilindro em balanço para a malha 20×20	131
6.16	Geometria e propriedades mecânicas de uma casca hemisférica com furo de 18°	132
6.17	Trajetoária de equilíbrio para os deslocamentos u_x e u_y	133
6.18	Trajetoária de equilíbrio e convergência para o deslocamento u_y	133
6.19	Configurações deformada da casca hemisférica com abertura de 18° para malha 16×16	134
6.20	Descrição das propriedades físicas e geométricas do <i>patch</i> teste.	135
6.21	Evolução da deformação da estrutura ao longo da análise.	135
6.22	Descrição física e geométrica da cobertura esférica e a malha utilizada para discretizar o problema.	136
6.23	Comparação da trajetória de equilíbrio da cobertura submetida a um carregamento concentrado.	137
6.24	Configurações deformada da cobertura esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.	137
6.25	Descrição geométrica e mecânica da casca cilíndrica estirada.	138

6.26	Trajetória de equilíbrio para os deslocamentos vertical e horizontal nos pontos A, B e C	139
6.27	Configurações deformada da cobertura esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.	140
6.28	Descrições física e geométrica da casca esférica submetida a um carregamento concentrado.	141
6.29	Trajetória de equilíbrio para a casca esférica submetida à uma carga concentrada em seu topo.	142
6.30	Configurações deformada da casca esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.	143
A.1	Representação das rotações espaciais finitas e das operações de mapeamento.	160
A.2	Atributos da rotação em 3D.	160
C.1	Trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos segundo o passo de carga.	179
C.2	Ilustração geométrica do método do comprimento de arco.	182

Lista de Tabelas

2.1	Medidas de deformação uniaxial utilizadas na análise não-linear da Mecânica do Contínuo referentes a uma barra de comprimento inicial L_0 e final L	23
2.2	Correlação entre os tensores de tensão utilizados na análise não-linear. . . .	33
3.1	Notação dos graus de liberdade do elemento.	49
3.2	Sequência necessária para se obter o vetor de deslocamentos deformacionais. . . .	51
3.3	Propriedades das formulações corrotacionadas C, EC e ESC.	67
6.1	Programas implementados para obtenção dos elementos e das curvas com os resultados.	122
6.2	Soluções numéricas e analítica para a viga em balanço com momento fletor em sua extremidade livre.	125
6.3	Comparação dos valores de deslocamento máximo para a casca cilíndrica. . . .	129
6.4	Comparação entre os resultados obtidos para os deslocamentos máximos nas direções x e y para a casca hemisférica.	132
6.5	Comparação entre os resultados obtidos para os deslocamentos máximos nas direções x e z para a casca hemisférica.	139
6.6	Evolução do erro conforme o passo de carga para os diferentes modelos hiperelásticos que simulam a casca esférica.	142
A.1	Comparação dos valores de deslocamento máximo para a casca cilíndrica. . . .	165

Lista de Abreviaturas e Siglas

ANDES	<i>Assumed Natural DEviatoric Strain</i>
C	Centroide do elemento ou corpo
C^0	Centroide do elemento na configuração inicial
C^R	Centroide do elemento na configuração corrotacionada
C^D	Centroide do elemento na configuração deformada
\mathcal{C}	Configuração genérica
\mathcal{C}^0	Configuração inicial (indeformada)
\mathcal{C}^R	Configuração corrotacional (corrotacionada)
\mathcal{C}^D	Configuração deformada (atual)
C	Formulação CR Consistente
CR	Corrotacional
CSE	<i>Consistent Symmetrizable Equilibrated</i>
EC	Formulação CR Equilibrada Consistente
EICR	<i>Element Independent Co-Rotational</i>
EFF	<i>Extended Free Formulation</i>
ESC	Formulação CR Equilibrada Simetrizável Consistente
GDL	Graus de Liberdade
FF	<i>Free Formulation</i>
LA	Formulação Lagrangeana Aumentada
LT	Formulação Lagrangeana Total
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRD	Método da Rigidez Direta
MSM	Métodos Sem Malha
MVF	Método dos Volumes Finitos
PK1	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff
PK2	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
PVC	Problema de Valor de Contorno

Lista de Símbolos

A notação utilizada por diferentes pesquisadores que trabalham com a formulação corrotacional (CR) ainda não chegou num consenso, principalmente, porque se trata de um tópico em desenvolvimento. Dessa forma, esta referência tem o objetivo de identificar os símbolos empregados neste trabalho. Em geral, a notação pode ser esquematizada da seguinte forma:

- Letras do alfabeto português sem negrito \rightarrow escalares;
- Letras minúsculas do alfabeto português ou grego em negrito \rightarrow vetores (exceção para ε, σ e τ que podem ser escritos na forma vetorial, mas representam tensores);
- Letras maiúsculas do alfabeto português ou grego em negrito \rightarrow matrizes ou tensores (exceção para \mathbf{X} , que representa um vetor).

Resumidamente, pode-se dizer que:

a, b, c, \dots ou A, B, C, \dots ou $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ou $\Gamma, \Lambda, \Xi, \dots \rightarrow$ Escalares.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ ou $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots \rightarrow$ Vetores.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ ou $\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Xi}, \dots \rightarrow$ Tensores de segunda ordem.

$\boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \dots \rightarrow$ Tensores de quarta ordem.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots \rightarrow$ Conjuntos.

Escalares

a	Índice nodal genérico
a^k	Solução aproximada para o método de Newton-Raphson
b	Índice nodal genérico
b_i	Componentes do vetor axial da transformada de Rodrigues–Cayley
c_i	Componentes do vetor \mathbf{c}
d	Como subíndice: deformacional
e	Índice do elemento
f_i	Componentes do vetor \mathbf{f}
h	Espessura do elemento de casca
h_i	Alturas dos triângulos
i	Índice genérico
j	Índice genérico

k	Contador de iteração
l	Índice genérico
m	Índice genérico
n	Índice genérico
n_i	Componentes do vetor \mathbf{n}
p_i	Componentes do Quaternário
r	Como subíndice: rígido
s_{kx}	Projeção do lado L_k do triângulo no eixo $\{x\}$
s_{ky}	Projeção do lado L_k do triângulo no eixo $\{y\}$
t	Tempo
u	Magnitude de deslocamento
u_i	Componentes dos deslocamentos no eixo $\{x_i\}$
\tilde{u}_i	Componentes dos deslocamentos no eixo $\{\tilde{x}_i\}$
\bar{u}_i	Componentes dos deslocamentos no eixo $\{\bar{x}_i\}$
u_{d_i}	Componentes dos deslocamentos deformacionais no eixo $\{x_i\}$
\tilde{u}_{d_i}	Componentes dos deslocamentos deformacionais no eixo $\{\tilde{x}_i\}$
\bar{u}_{d_i}	Componentes dos deslocamentos deformacionais no eixo $\{\bar{x}_i\}$
u_{r_i}	Componentes dos deslocamentos rígidos no eixo $\{x_i\}$
\tilde{u}_{r_i}	Componentes dos deslocamentos rígidos no eixo $\{\tilde{x}_i\}$
\bar{u}_{r_i}	Componentes dos deslocamentos rígidos no eixo $\{\bar{x}_i\}$
x	Eixo x_1 ao utilizar a notação $\{x, y, z\}$
x_i	Componentes do vetor \mathbf{x} no sistema local
\tilde{x}_i	Componentes do vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ no sistema base do elemento
\bar{x}_i	Componentes do vetor $\bar{\mathbf{x}}$ no sistema corrotacionado
y	Eixo x_2 ao utilizar a notação $\{x, y, z\}$
z	Eixo x_3 ao utilizar a notação $\{x, y, z\}$
A	Área do elemento ou sólido
E_i	Módulo de Elasticidade de Young na direção i
E_{ij}	Componentes de deformação do tensor de Green \mathbf{E}
J	Determinante do Jacobiano ou do gradiente de deformação
L_k	Comprimento do lado do triângulo oposto ao nó k
N	Número de nós na estrutura
N^e	Número de nós do elemento e
P	Ponto genérico
R	Raio
R_i	Região i de um corpo
S	Superfície de um dado volume V
U	Energia interna ou de deformação
V	Volume de um sólido ou elemento
W	Energia externa
X	Eixo X_1 ao utilizar a notação $\{X, Y, Z\}$
X_i	Componentes do vetor \mathbf{X} no sistema global
Y	Eixo X_2 ao utilizar a notação $\{X, Y, Z\}$
Z	Eixo X_3 ao utilizar a notação $\{X, Y, Z\}$
U	Energia interna ou de deformação

α	Coeficiente da representação parametrizada do tensor de rotação
β	Coeficiente da representação parametrizada do tensor de rotação
γ	Fator de normalização do tensor de rotação
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ	Erro utilizado como critério de convergência
ε_{ij}	Componentes do tensor de deformações de Cauchy-Green
ζ_i	Coordenadas triangulares
η	Coeficiente da matriz $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$
θ	Magnitude do vetor $\boldsymbol{\theta}$ ou ângulo genérico
ϑ	Coeficiente em $\mathbf{L}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta})$ e $\boldsymbol{\Lambda}$
λ	Constante de Lamé
μ	Constante de Lamé ou parâmetro da matriz $\mathbf{L}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\theta})$ depende do contexto
ν	Coeficiente de Poisson
ξ	Coeficiente da matriz $\boldsymbol{\Lambda}$
ρ	Densidade
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões de Cauchy
τ_{ij}	Componentes do tensor de tensões de Kirchhoff
ϕ	Ângulo genérico
φ	Ângulo genérico
ψ	Ângulo genérico
ω	Magnitude do vetor $\boldsymbol{\omega}$

Vetores

a	Vetor posição da origem do sistema global de coordenadas ao centroide de C^0
b	Vetor posição da origem do sistema global de coordenadas ao centroide de $C^R \equiv C^D$
c	Vetor de deslocamento do centroide C^0 à $C^R \equiv C^D$
d	Vetor de deslocamento genérico
$\hat{\mathbf{d}}$	Vetor de deslocamento deformacional em nível estrutural
$\bar{\mathbf{d}}$	Vetor de deslocamento que contém os GDL deformacionais
$\hat{\mathbf{e}}$	Vetor de base unitário
f	Vetor de força genérica ou força externa
$\bar{\mathbf{f}}$	Vetor de força externa no sistema corrotacionado
m	Vetor genérico de momento
\mathbf{m}_a	Vetor de momento nodal aplicado ao nó a
n	Vetor normal à uma superfície qualquer
\mathbf{n}_a	Vetor de força translacional nodal aplicado ao nó a
p	Vetor de forças internas da estrutura
\mathbf{p}^e	Vetor de forças internas do elemento no sistema global
$\bar{\mathbf{p}}^e$	Vetor de forças internas do elemento no sistema CR
r	Vetor de forças residuais
t	Vetor de forças trativas
u	Vetor de deslocamento genérico
\mathbf{u}_d	Vetor de deslocamento deformacional no sistema global $\{\mathbf{X}\}$

$\tilde{\mathbf{u}}_d$	Vetor de deslocamento deformacional no sistema base do elemento $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$
$\tilde{\mathbf{u}}_d$	Vetor de deslocamento deformacional no sistema CR $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$
\mathbf{u}_r	Vetor de deslocamento rígido no sistema global $\{\mathbf{X}\}$
$\tilde{\mathbf{u}}_r$	Vetor de deslocamento rígido no sistema base do elemento $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$
$\tilde{\mathbf{u}}_r$	Vetor de deslocamento rígido no sistema CR $\{\tilde{\mathbf{x}}\}$
\mathbf{v}	Vetor velocidade
\mathbf{w}	Vetor genérico
\mathbf{x}	Vetor posição genérico
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor posição das coordenadas do sistema base do elemento
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor posição das coordenadas do sistema CR
\mathbf{X}	Vetor posição das coordenadas globais
\mathbf{z}_i	Autovalores do tensor \mathbf{Z}
θ	Vetor axial de rotação
ϕ	Vetor axial construído a partir do ângulo ϕ_i
ψ	Vetor axial construído a partir do ângulo ψ_i
ω	Vetor axial de rotação

Matrizes e Tensores

\mathbf{A}	Matriz construída a partir de blocos de $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{n}}_a^e}$ e $\mathbf{0}$
$\hat{\mathbf{A}}$	Matriz construída a partir de blocos de $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{n}}_a^e}$ e $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{m}}_a^e}$
\mathbf{B}	Tensor de Green à esquerda
\mathbf{C}	Tensor de Green à direita
\mathcal{C}	Matriz constitutiva do material
\mathbf{D}	Matriz diagonal composta por zeros ou uns
\mathbf{E}	Tensor de deformações de Green
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
\mathbf{F}_n	Matriz auxiliar utilizada na obtenção da rigidez tangente
\mathbf{F}_{nm}	Matriz auxiliar utilizada na obtenção da rigidez tangente
\mathcal{F}	Função de uma matriz genérica
\mathbf{G}	Matriz de transformação que relaciona $\delta\tilde{\omega}$ e $\delta\tilde{\mathbf{d}}_e$
\mathbf{G}_a	Componente de \mathbf{G} associado ao nó a
\mathbf{H}	Matriz diagonal construída a partir de blocos de \mathbf{H}_a e \mathbf{I}
\mathbf{H}_a	Avaliação de $\mathbf{H}(\theta)$ no nó a
$\mathbf{H}(\theta)$	Jacobiano de θ em relação à ω
\mathbf{I}	Matriz identidade, o tamanho depende do contexto
\mathbf{J}	Matriz Jacobiana genérica
\mathbf{J}_{ab}	Matriz Jacobiana que relaciona quantidades dos nós a e b
\mathbf{K}	Matriz tangente da estrutura
\mathbf{K}^e	Matriz tangente do elemento e no sistema global
$\tilde{\mathbf{K}}^e$	Matriz linear do elemento no sistema local CR
$\tilde{\mathbf{K}}_R^e$	Matriz de rigidez tangente local
\mathbf{K}_{GM}	Matriz de rigidez geométrica de correção de momento
\mathbf{K}_{GP}	Matriz de rigidez geométrica de projeção de equilíbrio
\mathbf{K}_{GR}	Matriz de rigidez geométrica rotacional
\mathbf{K}_M	Matriz de rigidez material

\mathbf{L}	Matriz diagonal construída a partir de blocos de \mathbf{L}_a e $\mathbf{0}$
\mathbf{L}_a	Avaliação de $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$ no nó a
$\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$	Contração de $\frac{\partial \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})^T}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ com o vetor \mathbf{m}
\mathbf{N}	Tensor de giro para o vetor \mathbf{n}
\mathbf{Q}	Matriz ortogonal genérica
\mathbf{P}	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff
$\bar{\mathbf{P}}$	Matriz de projeção
$\bar{\mathbf{P}}_u$	Matriz de projeção da translação ou projetor-T
$\bar{\mathbf{P}}_\omega$	Matriz de projeção da rotação ou projetor-R
\mathbf{R}	Matriz de rotação ortogonal
\mathbf{R}_0	Transformação da matriz de rotação entre os sistemas base e CR
$\tilde{\mathbf{R}}_0$	Tensor de rotação \mathbf{R}_0 referido ao sistema base do elemento
$\bar{\mathbf{R}}_0$	Tensor de rotação \mathbf{R}_0 referido ao sistema CR
\mathbf{S}	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff
$\bar{\mathbf{S}}$	Matriz braço de alavanca construída a partir de blocos de $\bar{\mathbf{S}}_a$
$\bar{\mathbf{S}}_a$	Matriz braço de alavanca para o nó a
\mathbf{T}	Matriz de transformação entre os sistemas CR e global construída a partir de \mathbf{T}_R
\mathbf{T}_0	Tensor que faz o mapeamento do sistema base no global
\mathbf{T}_R	Tensor que faz o mapeamento do sistema CR no global
\mathbf{U}	Tensor de alongamento ou encurtamento para deformação pura relacionado com o tensor de Cauchy-Green à direita
\mathbf{U}_{ab}	Matriz que dá origem ao projetor-T, \mathbf{P}_u
\mathbf{V}	Tensor de alongamento ou encurtamento para deformação pura relacionado com o tensor de Cauchy-Green à esquerda
\mathbf{W}	Matriz antissimétrica genérica
\mathbf{Z}	Matriz contendo os autopares do tensor de rotação
$\boldsymbol{\Gamma}$	Matriz auxiliar utilizada na decomposição de \mathbf{G}
$\boldsymbol{\Theta}$	Tensor de rotação construído a partir do vetor axial de giro
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações lineares de Green
$\boldsymbol{\Lambda}$	Matriz diagonal com os autovalores de $\boldsymbol{\Omega}$
$\boldsymbol{\Xi}$	Matriz auxiliar utilizada na decomposição de \mathbf{G}
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões de Cauchy
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Tensor de tensões de Cauchy corrotacional
$\boldsymbol{\Sigma}$	Tensor de rotação construído a partir dos parâmetros b_i de Rodrigues–Cayley
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensões de Kirchhoff
$\boldsymbol{\Psi}$	Matriz auxiliar utilizada na decomposição do projeto-R, \mathbf{P}_ω
$\boldsymbol{\Omega}$	Tensor de rotação construído a partir de $\boldsymbol{\omega}$
$\boldsymbol{\Omega}_p$	Tensor de rotação construído a partir dos parâmetros quaternários p_i

Operadores

$(\dot{\cdot})$	Operador que representa a derivada de (\cdot) em relação ao tempo $\frac{d(\cdot)}{dt}$
$(\cdot)^0$ ou $(\cdot)_0$	(\cdot) pertence à configuração inicial (indeformada)
$(\cdot)^B$ ou $(\cdot)_B$	(\cdot) pertence à configuração base

$(\cdot)^D$ ou $(\cdot)_D$	(\cdot) pertence à configuração atual (deformada)
$(\cdot)^R$ ou $(\cdot)_R$	(\cdot) pertence à configuração corrotacionada
$(\cdot)_d$	(\cdot) refere-se à parte deformacional
$(\cdot)^e$	(\cdot) pertence ao elemento e
$(\cdot)_r$	(\cdot) refere-se à parte rígida
$(\cdot)^T$	Matriz transposta de (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	Matriz inversa de (\cdot)
$\text{axial}(\cdot)$	Operador matemático que extrai as três componentes de uma matriz antissimétrica
$\text{Anti}(\cdot)$	Parte antissimétrica da matriz (\cdot)
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz diagonal composta por (\cdot)
$\text{div}(\cdot)$	Divergente de (\cdot)
$\text{Exp}(\cdot)$	Matriz exponencial de (\cdot)
$\log_e(\cdot)$	Matriz logarítmica de (\cdot) na base e
$\text{Rot}(\cdot)$	Operador matemático que representa a rotação de (\cdot)
$\text{tr}(\cdot)$	Traço da matriz (\cdot)
$\delta(\cdot)$	Operador matemático que representa a variação de (\cdot)
$\Delta(\cdot)$	Variação de (\cdot) relativa à iteração no método de Newton-Raphson
$\phi(\cdot)$	função deformação
$\nabla(\cdot)$	Gradiente de (\cdot)

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Nesta tese, é analisado o problema da não-linearidade geométrica de cascas utilizando-se a formulação Corrotacional aliada ao Método dos Elementos Finitos para avaliar estruturas estáticas em que o material empregado é hiperelástico. Como a Mecânica engloba um campo extremamente extenso, este capítulo tem como objetivo apresentar alguns dos conceitos básicos desse tópico bem como propor os objetivos, as justificativas e a metodologia utilizada para realizar este trabalho.

Por questões didáticas, é dado três enfoques à Mecânica Clássica: a) *Mecânica Teórica*, b) *Mecânica Aplicada* e c) *Mecânica Computacional*. A primeira trata da fundamentação teórica a partir das leis e princípios que servem de suporte para esta ciência. A mecânica aplicada transfere esse conhecimento teórico para aplicações práticas da engenharia, especialmente, com relação a construção de modelos matemáticos que representem o fenômeno físico. A última, resolve problemas específicos por meio de simulações numéricas e métodos implementados em computadores. Ou ainda segundo Felippa e Haugen [29]: Pode-se definir a mecânica computacional como aquela que procura soluções para um dado problema, já quem procura por problemas que melhor se adequem a uma dada solução é a mecânica aplicada; e a mecânica teórica é a que pode provar a existência de tais problemas e suas soluções.

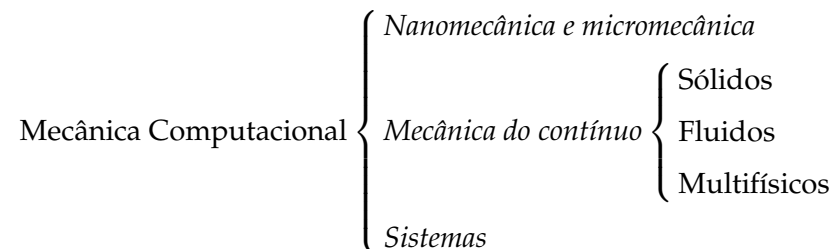
Como a mecânica computacional faz uso de computadores para resolver seus problemas, surgem os *Métodos Aproximados*. Esses métodos são baseados na discretização do espaço no qual o modelo matemático está inserido, isto é, o meio contínuo. São exemplos de métodos de discretização espacial: (i) Método dos Elementos Finitos (MEF), (ii) Método dos Elementos de Contorno (MEC), (iii) Método das Diferenças Finitas (MDF), (iv) Método dos Volumes Finitos (MVF), e mais recentemente, (v) os Métodos Sem Malha (MSM) ou *Meshless Methods*. Os métodos clássicos de diferenças finitas praticamente desapareceram do contexto

da mecânica dos sólidos. Entretanto, é o método mais empregado no campo da mecânica dos fluidos. O MEF é importante para a análise de problemas fortemente não-lineares de fluidos. Os Métodos Sem Malha surgem como uma nova classe de métodos numéricos onde os métodos tradicionais enfrentam algum tipo de problema [3, 4, 86, 87].

Neste contexto, dentre os diversos métodos que possibilitam a representação e a análise de problemas do meio contínuo, o MEF é, sem dúvida, o mais empregado. Sendo sua versatilidade uma das suas principais características [9, 44], visto que não fica restrito apenas a resolver problemas de mecânica estrutural, sendo empregado na solução de muitos outros tipos de problemas, tais como:

- Mecânica dos Sólidos;
- Mecânica dos Fluidos;
- Termodinâmica;
- Eletromagnetismo;
- Acústica, entre outros.

Dependendo do ramo da mecânica computacional, o foco de atenção pode ser distinto conforme a escala do fenômeno físico:



A *nanomecânica* trata de fenômenos físicos e químicos em níveis moleculares e atômicos. A *micromecânica* procura primeiramente trabalhar nos níveis granulares e cristalográficos. A mecânica do contínuo estuda os corpos em termos macroscópicos, utilizando-se de modelos contínuos em que a microestrutura é considerada homogênea. As duas áreas tradicionais de aplicação são sólidos e fluidos. A primeira inclui as estruturas que, obviamente, são constituídas de corpos sólidos. A mecânica computacional de sólidos tem uma abordagem de ciência aplicada, ou seja, enfatiza aplicações tecnológicas para análise e projetos de estruturas.

Portanto, a mecânica do contínuo se preocupa com o desenvolvimento de modelos matemáticos que representem adequadamente o problema em estudo. Numa análise estrutural, por exemplo, o objetivo pode ser a obtenção dos deslocamentos, deformações ou tensões atuantes no sistema. Com o aumento da complexidade da situação física real devido às condições de contorno, carregamento, geometria, entre outras, existe a necessidade

de se aplicar uma hipótese simplificadora para conseguir obter a solução, pois a solução analítica, dependendo da complexidade do problema em questão, é *a priori*, uma solução extremamente difícil de se obter. Atualmente, com o avanço alcançado pela indústria dos computadores, ocorre uma facilidade em avaliar uma estrutura de grande porte utilizando métodos aproximados. Com isso, busca-se desenvolver e aplicar tais métodos com a finalidade de desenvolver os princípios físicos e matemáticos inerentes à mecânica do contínuo de forma robusta e eficiente.

Com o intuito de facilitar a leitura das próximas seções, é importante descrever os dois principais tipos de não-linearidade: (i) geométrica e (ii) material. Como o próprio nome sugere, a não-linearidade geométrica surge de considerações puramente geométricas (relação deformação-deslocamento não-linear), ou seja, ocorre em análises onde as grandes rotações e deslocamentos devem ser consideradas. Esse tipo de comportamento é visto em diversos tipos de estruturas, tais como: cabos, membranas, cascas, entre outros. Além disso, a não-linearidade geométrica é suficiente para prever pontos de instabilidade estrutural [113].

A não-linearidade material ou física é caracterizada pelo comportamento não-linear entre a relação tensão-deformação, isto é, constitutiva do material. Pode-se destacar a viscoelasticidade apresentada por polímeros e aços, a resposta elastoplástica dada pelo concreto, a hiperelasticidade das borrachas, entre outros.

1.2 Breve Histórico da Análise Não-linear via MEF

Turner et al. [103] escreveram o primeiro artigo na análise de elementos finitos não-lineares e isso ocorreu no início da década de 1960 motivado pela indústria aeronáutica. O problema envolvia a condução de calor não uniforme e carregamento para grandes deflexões que eram resolvidos a partir de uma série de linearizações. A matriz de rigidez era atualizada no começo de cada passo de carga, temperatura e configuração geométrica.

Os primeiros quinze anos (1960 - 1975) foi dominado pelo interesse na formulação de elementos. Enquanto os pesquisadores desse período dedicaram tempo para obter equações não-lineares corretas e implementáveis, a arte de desenvolver tais equações de uma maneira confiável e eficiente foi negligenciada. Isso ajuda a compreender o domínio de métodos puramente incrementais, enquanto métodos corretivos como o Método de Newton não foram abordados com a devida atenção antes da década de 1970 e, apenas, para problemas de não-linearidade geométrica.

A maioria dos trabalhos precursores em não-linearidade geométrica estavam relacionados primeiramente à flambagem linear [37, 51]. Para problemas genuinamente não-lineares geometricamente, procedimentos incrementais foram originalmente adotados por Argyris [8], em que foi utilizada a matriz de rigidez geométrica juntamente com a atuali-

zação das coordenadas e de uma matriz de deslocamento inicial [28]. Uma proposta semelhante foi avaliada por Zienkiewicz et al. [119], só que para resolver o problema da não-linearidade material. Para plasticidade, em particular, a estrutura da matriz de rigidez tangente (relacionada com incrementos de carga e deslocamento) foi incorporada pela matriz modular tangencial em que os incrementos foram relacionados com as tensões e deformações [114, 119].

A abordagem incremental utilizada inicialmente foi considerada inadequada para solução de diversos problemas. Foi quando Oden [72] propôs o método iterativo de Newton-Raphson. Um procedimento modificado do método de Newton-Raphson foi recomendado por Haisler e seus colaboradores [38], e também por Zienkiewicz [116]. Em contraste com o método de Newton-Raphson tradicional, o método de Newton-Raphson modificado apresentou a vantagem de não ser necessária a atualização da matriz de rigidez continuamente. O conceito de combinação entre os métodos incrementais e iterativos foi introduzido por Murray [69].

Atualmente, passados pouco mais de quarenta anos desde o primeiro artigo em análise não-linear e milhares de publicações, o desenvolvimento nesta área não se deu de maneira igualitária, ou seja, alguns problemas estão completamente desenvolvidos enquanto que outros estão ainda obscuros.

1.3 Histórico da Formulação Corrotacional

A ideia básica da formulação Corrotacional (CR) é fazer a decomposição entre os movimentos totais (visíveis) dos corpos, isto é, separar os movimentos de corpo rígido e de deformação ou deformacionais. Tal formulação apareceu inicialmente no trabalho de Truesdell [102] para identificar a taxa de fluxo de tensão de Jaumann introduzido por Zaremba em 1903. Truesdell utilizou a formulação CR numa abordagem da mecânica do contínuo. Em 1955, essa taxa foi incorporada no campo da hipoelasticidade através de outras medidas invariantes de fluxo. Uma forma diferencial análoga foi proposta também para o problema da plasticidade. Alguns modelos corrotacionais foram empregados na mecânica dos fluidos, principalmente, para fluidos não-Newtonianos. Todos estes modelos contínuos tinham como principal restrição a magnitude da deformação.

Independente da descrição cinemática, o problema da rotação finita tridimensional na Mecânica do Contínuo promoveu um grande desafio para diversos pesquisadores [8, 9, 45, 46, 90, 91, 92, 94]. Além disso, devido a demanda de conhecimento e monitoramento do movimento principal das estruturas visando estabelecer um sistema de eixos cartesianos e ortogonais único que acompanhassem os corpos e, em relação ao qual, os deslocamentos, velocidades e acelerações de um ponto material eram unicamente deformacionais, muitos avanços foram alcançados nesta área, principalmente, nas indústrias aeronáutica e

aeroespacial [19, 20]. Dessa forma, a formulação CR se popularizou.

Devido a necessidade de se aplicar tal formulação em estruturas cada vez maiores, a discretização foi inevitável. Outro aspecto importante para o sucesso da formulação CR estava no cumprimento de uma hipótese inicial básica:

Condição 1. *Os deslocamentos e rotações deformaionais do elemento devem ser pequenos em relação ao sistema de eixos corrotacionados.*

Em outras palavras, ao invés de se utilizar um sistema de eixos único para toda a estrutura, procurou-se empregar um sistema de eixos por elemento o que caracterizava uma ideia muito simples. Com isso, no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), Wempner [111] foi o pioneiro em fazer uso da descrição cinemática corrotacional para o estudo de rotações finitas e pequenas deformações de cascas.

Poucos anos depois, Belytschko e Hsieh [15] utilizaram a mesma ideia de Wempner [111] para propor um método baseado num sistema de coordenadas curvilíneas para um elemento de viga. Em 1976, Veubeke e Millard [104, 105] em dois artigos distintos expuseram a descrição cinemática CR para avaliar problemas de estruturas flexíveis. O intuito era o de apresentar uma solução analítica do problema em questão descrito como *shadow element* (ou elemento sombra) do que propor um elemento finito propriamente dito.

Posteriormente, Horrigmoe e Bergan [43] apresentaram um elemento semelhante ao desenvolvido por Veubeke [104] o qual foi chamado de *ghost element* (ou elemento fantasma). A diferença estava em submeter a estrutura a um único sistema de coordenadas e não um sistema que acompanhasse o elemento. Portanto, esses pesquisadores tinham acabado de criar uma ferramenta extremamente proveitosa para a visualização dos fenômenos físicos envolvidos, que por sua vez, auxiliou o entendimento da formulação CR. Entretanto, o conceito do elemento fantasma, isto é, excluir o movimento de corpo rígido de cada elemento e obter apenas o movimento deformacional provocou uma inconsistência no modelo: O vetor de forças internas do elemento computado e obtido a partir do movimento deformacional eram usados na matriz de rigidez tangente, porém, as suas derivadas não, ocasionando, assim, a incoerência do modelo proposto.

Em meados da década de 1980, Rankin e Brogan [82] introduziram o conceito de EICR, *Element Independent Co-Rotational fomulation* (ou formulação corrotacional de elemento independente). Posteriormente, essa nova abordagem na formulação CR foi melhorada por Rankin e Nour-Omide [71, 81, 83]. Nessa nova maneira de encarar a formulação, o conceito do elemento sombra não era aplicado, mas uma variação do mesmo, ou seja, a forma de se obterem os deslocamentos deformaionais era bastante similar. A vantagem apresentada neste ponto foi a introdução dos operadores de projeção ou, simplesmente, *projetores*. A formação da matriz de rigidez tangente se deu de maneira direta, dando consistência à matriz de rigidez.

Concomitantemente, Crisfield [21] formulou um elemento corrotacionado consis-

tente. Em seu artigo, foi apresentado uma matriz de rigidez tangente obtida a partir do vetor de forças internas promovendo, assim, uma matriz consistente. Além disso, para o exemplo de uma viga engastada submetida a um momento em sua extremidade livre, o modelo proposto conseguiu convergir após dez iterações em uma malha com cinco elementos. Rankin [81] obteve o mesmo resultado, entretanto, utilizando dez elementos. Crisfield enfatizou o uso da formulação de maneira análoga a apresentada por Simo e Vu-Quoc [95], contudo, o seu modelo convergia mais rapidamente. O autor concluiu que apesar da matriz de rigidez tangente não ser simétrica, a simetria foi recuperada quando um estado de equilíbrio era alcançado para análises de sistemas conservativos aliado ao método de Newton-Raphson para resolver as equações não-lineares. Em 1991, Crisfield dedicou parte do Capítulo 7 do seu livro [22] para apresentar essa metodologia.

A formulação proposta por Nour-Omid e Rankin [71] apresentava algumas restrições relativas ao número de graus de liberdade que poderiam participar na rotação do sistema de coordenadas do elemento e, ao mesmo tempo, a consistência da matriz de rigidez tangente [19]. Em 1994, Haugen [39], em sua tese, desenvolveu elementos planos de casca triangulares e retangulares combinados com as ferramentas da formulação EICR (projetores) e do elemento sombra, os quais foram capazes de gerar resultados satisfatórios para análise de problemas não-lineares de instabilidade de estruturas. Haugen realizou uma série exaustiva de exemplos numéricos com o intuito de validar o modelo proposto.

Carlos A. Felippa e seus colaboradores [5, 30, 31, 32, 33, 68] publicaram uma série de artigos a partir de 1992, onde foi proposta a formulação de um elemento triangular de 3-nós com nove graus de liberdade incluindo a rotação torcional, os denominados *drilling rotations*, para parametrizar os princípios variacionais. Esse princípios forneciam uma base unificada para diversas técnicas de construção de elementos avançados, particularmente: A formulação livre ou *Free Formulation* (FF), a formulação livre estendida (*Extended Free Formulation* - EFF) e a formulação de deformação deviatória natural, ANDES - *Assumed Natural DEviatoric Strain*. Essa última, tem como ideia chave que somente a parte deviatória das deformações são assumidas sobre os elementos, onde a parte principal da deformação foi descartada em favor de uma hipótese de tensão constante. Os primeiros artigos, mostravam a formulação em detalhes [5, 31, 33]. Por fim, foram mostrados aspectos computacionais e até o código utilizado em linguagem Fortran[®] foi apresentado [30, 32].

Em 1997, Pacoste e Eriksson [75] compararam diversos elementos de viga, dentre os quais, o obtido pela formulação CR e o proveniente da descrição cinemática Lagrangeana. Foram avaliados oito exemplos numéricos, tanto bidimensionais como tridimensionais, e todos os provenientes da CR apresentaram melhor convergência. O cerne do artigo estava na análise da instabilidade estrutural. Foi concluído que não era suficiente aumentar o número de graus de liberdade dos elementos ou refinar a malha no tratamento de fenômenos complexos como a instabilidade de estruturas. Houve a necessidade de estender o conceito da

descrição cinemática para a melhora efetiva na resposta numérica. Ademais, os exemplos numéricos tinham o intuito de verificar as propriedades dos elementos e suas habilidades em prever o comportamento pós-flambagem para os casos de instabilidades de ordem superior. Para os elementos lagrangeanos, o fato das derivadas rotacionais de ordem superior serem negligenciadas acarretou em pouca acurácia nos resultados desses elementos.

Um ano após a sua publicação, Pacoste [74] estendeu a ideia inicial do seu artigo sobre elementos de viga para um elemento triangular de casca. A ênfase foi dada ao tratamento das grandes rotações no espaço 3D. Foi necessária a escolha correta na parametrização do vetor rotacional utilizado. Foi apontado também que se a escolha de numeração nodal for sem nenhum critério, isso acarretaria em algum tipo de problema de convergência. Assim como Haugen [39], Pacoste empregou um elemento plano triangular com graus de liberdade de rotação torcional. Na formulação de membrana, foi utilizada a integração reduzida para aliviar o efeito de travamento ou *locking* na matriz de rigidez do elemento, inicialmente abordada por Zienkiewicz [118]. Todavia, no exemplo numérico de uma casca hemisférica, tal procedimento não foi suficiente para evitar o travamento. Para solucionar o problema, aumentou-se o refinamento da malha. Finalmente, o autor conclui que do ponto de vista computacional, o procedimento apresentado gerou resultados bastante satisfatórios e eficientes, onde foram necessárias três a cinco iterações por incremento.

No mesmo ano, Petrov e G radin [79] propuseram um elemento de viga aplicando uma técnica baseada na formulação CR, porém, empregando uma técnica de redução no número de termos não-lineares do tensor de deformação de Green. Os autores concl  ram que uma nova abordagem na análise não-linear geométrica exata de vigas foi desenvolvida e que a nova teoria permitiria retirar todas as componentes do tensor de tensões, e não somente as tensões que pudessem ser reduzidas a resultantes de tensão, para que o problema fosse abordado sob diferentes aspectos e teorias de viga (Bernoulli-Euler ou Timoshenko-Reissner). O conceito foi estendido para vigas anisotrópicas [80].

Jelenic e Crisfield [48] expandiram a ideia da formulação corrotacional apresentada por Crisfield e outros pesquisadores [23, 24] para formular um elemento de viga 3D baseado na análise não-linear geométrica exata.

Mais recentemente, Battini [13] descreveu um novo procedimento para computação direta de pontos críticos para vigas elásticas sob ação dos deslocamentos e rotações finitas. A condição crítica foi expressa por uma equação escalar. A seguir, foram apresentadas abordagens de iteração combinadas baseadas no sistema estendido obtido pelas equações de equilíbrio na condição crítica com iterações baseadas somente nas equações de equilíbrio sob controle de carga e carregamento. Posteriormente, a mesma aproximação foi particularizada para o problema de placas, membranas e cascas [10, 11, 12] que empregavam a descrição cinemática CR.

1.4 Motivações

Durante os últimos sessenta anos, vários pesquisadores ao redor do mundo vêm realizando investigações com o propósito de melhorar e desenvolver técnicas confiáveis para análise de estruturas. Com o desenvolvimento da ciência dos materiais e da necessidade de se utilizar materiais mais leves, com maior rigidez e vida útil, as estruturas que são empregadas, hoje em dia, são cada vez mais esbeltas. Em decorrência disso, a resposta da estrutura que poderia ser simplificada como sendo linear, torna-se obrigatoriamente não-linear.

Uma estrutura linear é aquela caracterizada por um modelo matemático que para todas as possibilidades de variáveis de carregamento e deslocamento conduzem a uma trajetória de equilíbrio linear. Como consequência de tal hipótese, a estrutura pode sustentar qualquer carregamento proporcionalmente a magnitude do deslocamento. Também não há pontos críticos e de falha. A resposta para diferentes sistemas podem ser obtidas por superposição e, finalmente, removendo a carga, a estrutura retorna a posição inicial. Portanto, essas restrições fazem do modelo linear aplicáveis as seguintes estruturas: (i) Perfeitamente lineares elásticas para qualquer deformação, (ii) deformações infinitesimais e (iii) carregamento infinito. Essas hipóteses além de serem fisicamente irreais, são também contraditórias entre si. Por isso, a análise não-linear se faz necessária, pois a demanda por modelos matemáticos confiáveis em projetos de alta performance é cada vez maior em nossos dias. Dessa forma, as seguintes características são percebidas pelo modelo não-linear:

- O princípio da superposição não pode ser feito;
- O histórico do carregamento influencia na resposta;
- O estado inicial do sistema é importante (pré-tensão).

Outro aspecto importante e motivador foi trabalhar com uma formulação pouco empregada nos dias de hoje. Isso se deve principalmente pela complexidade das expressões encontradas na formulação corrotacional. Entretanto, como a base do programa escrita em Fortran[®] foi disponibilizada pela Universidade de Brasília, UnB, por meio do co-orientador desta tese, tal complexidade não foi razão de impedimento para a realização deste trabalho.

Ademais, embora exista um número grande de problemas não-lineares, tipicamente materiais, que poderiam ser abordados, foi escolhida a hiperelasticidade em particular devido à sua importância na aplicação de problemas de engenharia. Não obstante, tal hipótese também caracteriza o comportamento da pele humana que é objeto de estudo recente dentro da Mecânica Aplicada.

Nesse contexto, surge a necessidade de gerar modelos numéricos que sejam confiáveis e capazes de representar de maneira simples e eficiente um problema complexo da engenharia. Além disso, conforme apresentado pela breve revisão bibliográfica, o entendi-

mento completo tanto do elemento de casca quanto da formulação corrotacional ainda não foram alcançados, justificando, assim, o estudo deste trabalho.

1.5 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é propor um elemento finito bidimensional de casca capaz de avaliar o problema da hiperelasticidade e da não-linearidade geométrica de uma dada estrutura, de forma precisa e acurada, submetida a grandes deslocamentos e rotações. Num primeiro momento, o modelo é limitado para as pequenas deformações e, posteriormente, não há restrição de deformação. Para isso, são utilizados elementos finitos obtidos a partir da descrição cinemática corrotacional, que está baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) dos movimentos deformacionais. Tal elemento é derivado no contexto da formulação de deformação deviatória natural, ANDES, e dos métodos de Newton e do comprimento de arco proposto por Felippa e seus colaboradores [29, 31, 33, 68]. O intuito é fazer uso de um elemento finito linear de casca existente capaz de descrever corretamente os fenômenos físicos e adaptá-lo ao comportamento de materiais hiperelásticos.

Para avaliar, e assim, validar os elementos propostos, serão comparadas as soluções analíticas e numéricas obtidas por outros elementos de casca, tanto 2D quanto 3D, encontrados na literatura com os elementos corrotacionais. Por fim, o objetivo secundário desta tese é ampliar a validação de elementos finitos triangulares de 3 nós que utilizam a descrição cinemática corrotacional na sua formulação e sistematizar, ou ainda, padronizar os termos empregados na CR.

1.6 A Originalidade da Tese

A originalidade deste trabalho está no fato de que o problema da hiperelasticidade nunca foi abordado anteriormente aos olhos da formulação CR para elementos de casca. Este tipo de análise foi previamente realizada a partir das descrições cinemáticas Lagrangeana Total e Atualizada (LT e LA, respectivamente – ou do inglês TL, *Total Lagrangean* e UL, *Update Lagrangean*). Portanto, esta tese tem um caráter próprio que nunca foi avaliado previamente.

1.7 Apresentação do Trabalho

Este capítulo introdutório apresentou um apanhado geral do que vem acontecendo nos últimos 30 anos na análise não-linear de estruturas bem como quais são os rumos da formulação corrotacional. Através do breve histórico realizado em forma de pesquisa bibliográfica, foi possível compreender superficialmente em que consiste a formulação CR.

Ademais, mostrou os objetivos e as justificativas utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, o **Capítulo 2** apresenta alguns dos conceitos básicos e preliminares da elasticidade finita. Esses conceitos são fundamentais para entender e estabelecer as equações constitutivas no contexto dos materiais hiperelásticos, onde as tensões são derivadas a partir de uma função de energia elástica armazenada.

O **Capítulo 3** discute formalmente os tópicos inerentes à formulação corrotacional de uma forma genérica, ou seja, para qualquer tipo de elemento (barra, viga e casca). Inicialmente, são desenvolvidos alguns aspectos importantes de outras descrições cinemáticas além de apresentar as vantagens e desvantagens da formulação CR para as outras formulações. Posteriormente, é apresentada a formulação corrotacional, particularizada para o elemento independente (EICR) com formulação equilibrada simetrizável consistente, ESC – do inglês *Consistent Symmetrizable Equilibrated*, desenvolvida por Haugen [39] em sua tese, a qual é efetivamente utilizada neste trabalho.

O **Capítulo 4** descreve o desenvolvimento do elemento finito de casca linear elástico triangular de três nós EICR, proposto inicialmente por Felippa e Militello [31, 68]. São apresentados os procedimentos para a obtenção da matriz de rigidez tangente e do vetor das forças internas para este elemento.

Na sequência, o **Capítulo 5** apresenta a aplicação do modelo material hiperelástico ao elemento finito corrotacional a partir do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente que, além de considerar a não-linearidade material, mensura a não-linearidade geométrica. Com o intuito de explorar as diferentes respostas do elemento implementado, são destacadas algumas hipóteses constitutivas da hiperelasticidade isotrópica, a saber: (i) Lei de Hooke relacionando as tensões do 2º tensor de Piola-Kirchhoff com as deformações de Green-Lagrange e (ii) modelo material de Saint Venant-Kirchhoff. Ademais, é apresentado o modelo hiperelástico que simula o comportamento da pele humana.

Com o embasamento teórico necessário visto nos **Capítulos 2, 3, 4 e 5**, o **Capítulo 6** mostra as aplicações numéricas e os resultados obtidos neste trabalho. Foram avaliados diversos exemplos existentes na literatura a fim de validar o elemento de casca hiperelástico obtido a partir da descrição cinemática CR e da formulação CSE. De uma forma geral, observa-se boa concordância dos resultados apresentados nesta tese em relação aos resultados obtidos em outros trabalhos.

Finalmente, o **Capítulo 7** contém as considerações finais deste trabalho. Além disso, são apontadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

Introdução à Elasticidade Finita

2.1 Introdução

Como ponto de partida, este capítulo irá introduzir alguns conceitos de deformação, tensão e equilíbrio para um corpo deformável em movimento. Os conceitos apresentados são oriundos principalmente do livro do Bonet e Wood [17] e do Reddy [85].

Em contraste com a análise linear, as quantidades de tensão que se referem às diferentes configurações podem ser contempladas utilizando os conceitos de trabalho conjugado que define o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff.

Inicialmente, enfatiza-se que um corpo sólido é formado por moléculas discretas compostas por átomos. O estudo físico nesse nível é bastante útil para compreender uma gama extensa de fenômenos. Entretanto, estudar tais fenômenos nessa escala para solucionar problemas de engenharia não é algo muito útil. Por isso, o intuito deste capítulo é apresentar uma introdução à Elasticidade Finita vista sob a ótica da Mecânica do Contínuo, cujo objetivo é avaliar o problema em sua escala macroscópica.

2.2 Movimento de um Corpo \mathcal{B}

2.2.1 Configuração do Meio Contínuo

Considere um corpo \mathcal{B} de geometria conhecida sob ação de forças no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 . O corpo \mathcal{B} pode ser visto como uma série de partículas que representam um grande número de moléculas, cuja distribuição é contínua no espaço e no tempo. Para um dado carregamento, \mathcal{B} irá sofrer mudanças de geometria macroscópica, as quais são conhecidas por *deformação*. Essas mudanças de geometria são acompanhadas por um estado de tensão que é introduzido no corpo. Se o carregamento aplicado é função do tempo, a deformação do corpo também dependerá do tempo, ou seja, a geometria do corpo \mathcal{B} mudará

continuamente com o tempo. Se a carga é aplicada de maneira lenta, a deformação dependerá do histórico de cargas aplicadas. A região ocupada pelo contínuo num dado tempo t é conhecida como *configuração* e é simbolizado por Ω . Assim, as posições simultaneamente ocupadas no espaço \mathbb{R}^3 por pontos materiais de um corpo contínuo \mathcal{B} em diferentes instantes de tempo são designadas por *configurações*.

Dessa forma, a Fig 2.1 mostra um movimento genérico de um corpo deformável \mathcal{B} . Supõe-se que o corpo seja formado pela união de partículas caracterizadas pelas coordenadas \mathbf{X} em relação à base cartesiana \mathbf{E}_I em sua posição inicial no tempo $t = 0$. A posição dessas partículas na configuração atual, isto é, no tempo t é dada pelas coordenadas \mathbf{x} em relação à base cartesiana \mathbf{e}_i . Por conveniência, doravante, tais bases serão consideradas coincidentes ($\mathbf{E}_I \equiv \mathbf{e}_i$).

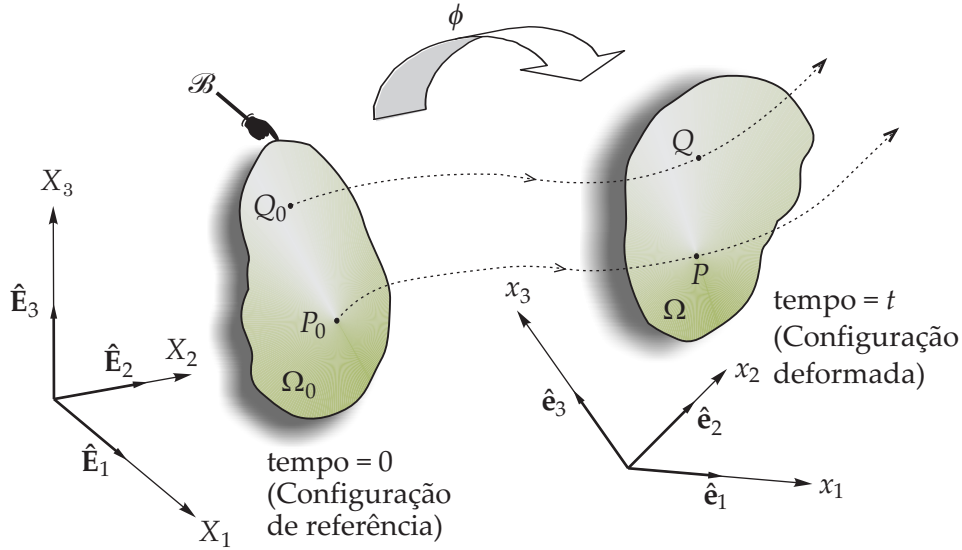


Figura 2.1: Movimento de um corpo genérico \mathcal{B} deformável.

Observação 2.1. A notação de configuração utilizada na Fig. 2.1 está em concordância com a maioria dos autores que tratam do problema da hiperelasticidade [16, 17, 93]. Entretanto, ao descrever o problema do ponto de vista da formulação corrotacional serão válidas as seguintes relações: $\Omega_0 \equiv \mathcal{C}^0$ e $\Omega \equiv \mathcal{C}^D$.

Inicialmente, o corpo ocupa a configuração Ω_0 em que a partícula P_0 ocupa a posição \mathbf{X} cuja referência é o sistema cartesiano $\{X_1, X_2, X_3\}$. Após a aplicação do carregamento, a geometria muda de forma e assume a nova configuração Ω . Agora, a partícula P_0 passa a ocupar o ponto P e posição \mathbf{x} na configuração deformada, conforme mostra a Fig. 2.2.

O mapeamento $\phi : \mathcal{B}_{\Omega_0} \rightarrow \mathcal{B}_{\Omega}$ é chamado de *mapeamento de deformação* de um corpo genérico \mathcal{B} de uma configuração Ω_0 para outra Ω . Com isso, o movimento de um corpo \mathcal{B} pode ser descrito matematicamente pelo mapeamento entre as posições inicial e final das

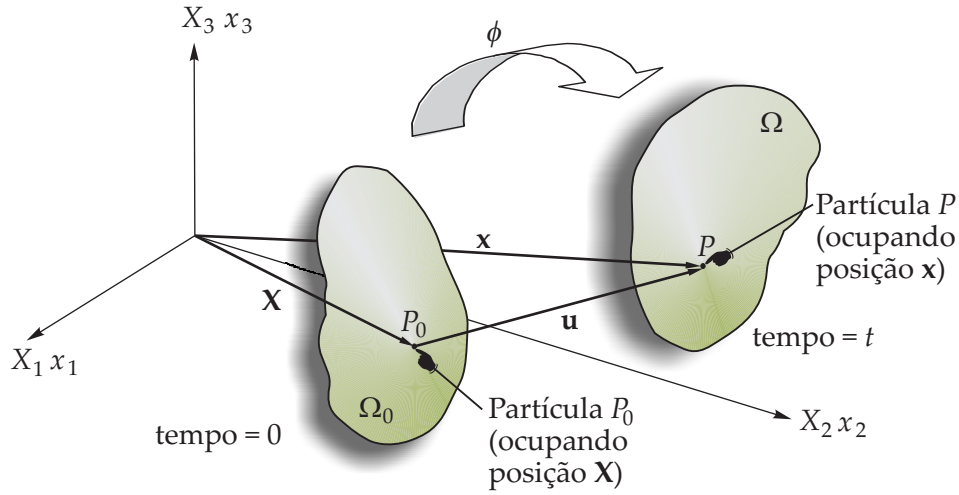


Figura 2.2: Configurações de referência e deformada de corpo \mathcal{B} .

partículas por:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \phi_t(\mathbf{X}) \quad (2.2.1)$$

Como essa função vetorial descreve a maneira que um corpo varia ou se deforma de uma posição a outra, ela é também chamada de *função de deformação*.

Observação 2.2. Para um valor fixo de tempo, a Eq. (2.2.1) representa o mapeamento entre os corpos indeformado e deformado. Além disso, para um ponto fixo em relação à posição inicial \mathbf{X} , a expressão (2.2.1) descreve a trajetória desse ponto em função do tempo. Para deformação infinitesimal, o deslocamento $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ é considerado pequeno se comparado com as dimensões do corpo e a mudança de geometria é negligenciada.

2.2.2 O Campo de Deslocamentos

A expressão deformação do meio contínuo consiste na relação dos deslocamentos relativos e a mudança de geometria experimentada pelo corpo sob influência de um carregamento ou sistema de forças. Assim, o campo de deslocamento apresentado pela Fig. 2.2 pode ser obtido por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2.2)$$

O corpo deformável é aquele em que essas partículas podem se mover em relação uma da outra. Então, a deformação do contínuo pode ser determinada somente pela consideração de mudança de distância entre dois pontos arbitrários quaisquer.

2.3 A Análise de Deformação

2.3.1 O Gradiente de Deformação

Uma grandeza muito importante na análise não-linear é o *gradiente de deformação* de Ω em relação à configuração de referência Ω_0 , simbolizado por \mathbf{F} , o qual relaciona um segmento material $d\mathbf{X}$ antes da deformação com o filamento $d\mathbf{x}$ (que consiste do mesmo material de $d\mathbf{X}$) após a deformação.

Para isso, considera-se o movimento genérico ilustrado pela Fig. 2.3 e os pontos P_0 e Q_0 do corpo \mathcal{B} . Seja \mathbf{X} e $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ os vetores posição de P_0 e Q_0 na configuração de referência, respectivamente. Na configuração atual, os pontos P_0 e Q_0 passam a ocupar P e Q e suas posições são obtidas pelos vetores posição \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, respectivamente. Comparando com (2.2.1), pode-se definir que:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \phi_t(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (2.3.1)$$

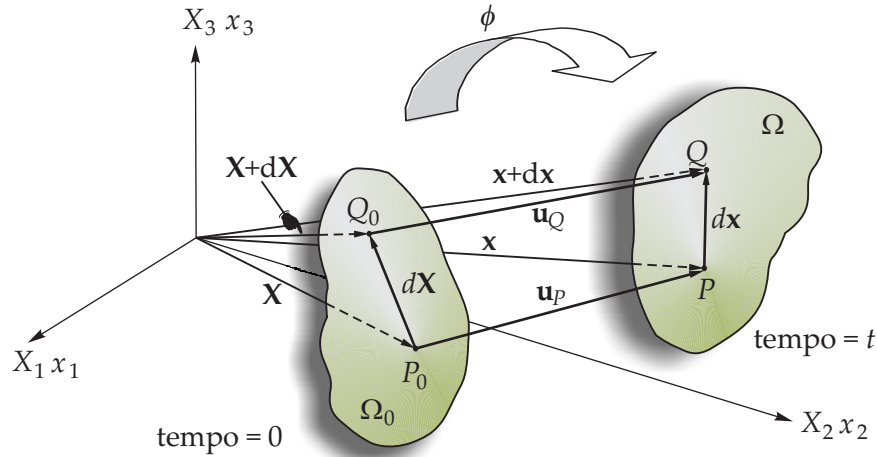


Figura 2.3: Pontos P_0 e Q_0 separados por $d\mathbf{X}$ na configuração inicial Ω_0 que passam a ocupar P e Q na configuração deformada Ω cuja distância é $d\mathbf{x}$.

A seguir, assume-se que para cada tempo t o mapeamento ϕ_t seja suave, e expandindo (2.3.1) em série de Taylor com notação indicial, obtém-se:

$$x_i + dx_i = \phi_i(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \phi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} dX_j + O(dX_j^2) \quad (2.3.2)$$

em que,

$$\lim_{dX_j \rightarrow 0} \frac{O(dX_j^2)}{dX_j} = 0 \quad (2.3.3)$$

Subtraindo (2.3.2) de (2.2.1) e desconsiderando os termos de ordem superior da série, chega-se à:

$$dx_i = \frac{\partial \phi_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad (2.3.4)$$

que pode ser re-escrito na forma compacta:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \text{portanto} \quad \mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T = (\nabla_0 \mathbf{x})^T \quad (2.3.5)$$

onde ∇_0 representa o operador gradiente em relação a \mathbf{X} . Note que o gradiente de deformação é de extrema importância para análise de deformação finita, pois relaciona quantidades antes que a deformação ocorra com as respectivas grandezas envolvidas após ou durante a deformação.

Por definição, o gradiente de deformação é um tensor de segunda ordem. A relação inversa pode ser obtida por:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad \text{em que} \quad \mathbf{F}^{-T} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla \mathbf{X} \quad (2.3.6)$$

e ∇ simboliza o operador gradiente em relação a \mathbf{x} . As Eqs. (2.3.5) e (2.3.6) podem ser explicitadas na forma matricial por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

O determinante de \mathbf{F} que é indicado por J e chamado por *determinante de movimento* ou *determinante do gradiente de deformação*, pode ser expresso por:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (2.3.8)$$

Como foi descrito, o mapeamento ϕ_t foi considerado suave. Matematicamente, isso significa que algumas condições devem ser levadas em consideração, a saber:

1. A função $\phi(\mathbf{X}, t)$ deve ser contínua e diferenciável;

2. A função $\phi(\mathbf{X}, t)$ deve ser única;
3. O determinante do gradiente de deformação deve satisfazer a condição $J > 0$.

Essas condições garantem que $\phi(\mathbf{X}, t)$ seja suficientemente regular para que não hajam intervalos ou sobreposições no corpo deformado. O gradiente de deformação é geralmente descontínuo na interface entre materiais diferentes. Em alguns fenômenos, como a evolução de falha, o movimento por si só é descontínuo, embora as três condições simultaneamente não sejam encontradas em tal modelo, o primeiro item deve ser satisfeito.

A segunda condição é que o movimento deve ser único, ou seja, para cada ponto da configuração de referência Ω_0 , existe tão-somente um único ponto em Ω e vice-versa. Essa é uma condição necessária e suficiente para garantir a regularidade de \mathbf{F} , ou em outras palavras, para que \mathbf{F} seja inversível, pois se existe a forma inversa de \mathbf{F} é porque $J \neq 0$. Dessa forma, o segundo e terceiro itens estão relacionados entre si. A terceira condição pode ser violada ao se avaliar a evolução de uma falha em uma superfície, pois cada ponto de falha se divide em dois.

Observação 2.3. Note que a expressão $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = 0$ para $d\mathbf{X} \neq 0$ implica que um segmento do material na configuração de referência se reduz a zero após a deformação. Como fisicamente isso não corresponde a uma condição verdadeira e realista, conclui-se que $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \neq 0$ para $d\mathbf{X} \neq 0$, ou seja, \mathbf{F} é um tensor não-singular ($J \neq 0$). Por esse motivo, existe a forma inversa de \mathbf{F} .

2.3.2 Tipos de Deformação

Um corpo pode se deformar de três maneiras, ou em outras palavras, existem três tipos de deformação definidas pela mecânica do contínuo:

1. Deformação isocórica \rightarrow se o Jacobiano for unitário, $J = 1$, então a deformação é uma rotação rígida ou as configurações atual e inicial coincidem. Se o volume do corpo é preservado após a deformação, a deformação é dita isocórica, ou seja, $\Delta V = 0$.
2. Deformação homogênea \rightarrow o gradiente de deformação \mathbf{F} é, em geral, função de \mathbf{X} . Se $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, significa que o corpo não se deformou. Se \mathbf{F} tem o mesmo valor em cada ponto material do corpo (\mathbf{F} é independente de \mathbf{X}) em um dado tempo $t > 0$, então o mapeamento $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ representa o movimento homogêneo do corpo e a deformação é dita *homogênea*.
3. Deformação não-homogênea \rightarrow é aquela em o gradiente de deformação \mathbf{F} é função de \mathbf{X} .

2.3.3 Decomposição da Deformação Homogênea

A deformação homogênea pode ser dividida em dois tipos: a composição de uma (i) deformação pura seguida por uma rotação pura ou (ii) rotação pura seguida por uma

deformação pura. A rotação pura ocorre quando cada segmento do corpo não sofre variação em seu comprimento após a deformação, apenas uma mudança em sua orientação. Já a deformação pura acontece quando durante a deformação do corpo, no mínimo um dos três segmentos do corpo estão sujeitos à variação de seus comprimentos, porém, sem mudança de orientação.

É importante destacar que a rotação de corpo rígido é um ponto crucial na teoria não-linear da Mecânica do Contínuo. O movimento ou função de deformação que representa uma rotação pura, pode ser dada por:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{R}(t)] \mathbf{X} \quad (2.3.9)$$

em que $\mathbf{R} = [\mathbf{R}(t)]$ não é uma função de \mathbf{X} , pois:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad (2.3.10)$$

Observa-se que para a Eq. (2.3.10) ser satisfeita, obrigatoriamente o $\det(\mathbf{R}) = \pm 1$. Quando $\det(\mathbf{R}) = 1$, a rotação é própria e para $\det(\mathbf{R}) = -1$ a rotação é uma reflexão, isto é, a função de deformação não representa uma rotação pura.

Para o caso de deformação homogênea pura, a função de deformação que representa o movimento é obtido por meio de:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{U}(t)] \mathbf{X} \quad (2.3.11)$$

em que $\mathbf{U} = [\mathbf{U}(t)]$ representa o tensor de alongamento ou encurtamento e também não depende de \mathbf{X} , pois $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$. Note que se \mathbf{U} é simétrico, \mathbf{U} é diagonalizado e desde que $J > 0 \rightarrow \det(\mathbf{U}) > 0$. Ademais, a deformação homogênea pura tem a propriedade de que existem segmentos \mathbf{d}^* em Ω_0 que sofrem alongamento ou encurtamento após a deformação, todavia sem rotação sendo indicados por $\mathbf{d} = \phi_t(\mathbf{d}^*)$ na configuração deformada Ω_t . Com isso,

$$\mathbf{d} = \mathbf{U} \mathbf{d}^* = \lambda \mathbf{d}^* \quad (2.3.12)$$

que rearranjando os termos fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \mathbf{d}^* &= \lambda \mathbf{I} \mathbf{d}^* \\ \mathbf{0} &= (\mathbf{U} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{d}^* \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

A direção de \mathbf{d}^* é dada pelos autovetores associados aos autovalores λ de \mathbf{U} . Portanto, os segmentos do corpo \mathcal{B} , na direção de \mathbf{d}^* , são alongados ou encurtados pelo fator λ sem o efeito da rotação.

2.3.4 Decomposição Polar

Qualquer deformação homogênea genérica do tipo $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ pode ser decomposta por:

- a) Uma deformação pura ou alongamento seguido de uma rotação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (2.3.14)$$

- b) Uma rotação pura seguido de um alongamento ou deformação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.3.15)$$

Da decomposição proposta pelas Eqs. (2.3.14) e (2.3.15), definem-se os tensores de Cauchy-Green à direita e à esquerda, respectivamente, por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.3.16)$$

2.3.5 Mudança de Volume

Com o efeito da deformação sobre o corpo, é necessário avaliar como isso afeta a área e o volume de \mathcal{B} . A motivação deste tópico vem do mister de escrever equações de equilíbrio que envolvem integrais sobre área e volume. Por isso, inicialmente define-se o volume e a superfície do elemento nas configurações deformada e de referência. Considerando três segmentos lineares não-coplanares $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ e $d\mathbf{X}_3$ que formam um paralelepípedo no ponto P_0 com vetor posição \mathbf{X} na referência de \mathcal{B} , como ilustra a Fig 2.4, portanto:

$$d\mathbf{x}_i = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_i \quad (\text{para } i = 1, 2, 3) \quad (2.3.17)$$

Os vetores $d\mathbf{x}_i$ não são necessariamente paralelos ou têm o mesmo comprimento de $d\mathbf{X}_i$. Assumindo que a tríade $\{d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2, d\mathbf{X}_3\}$ seja positivamente orientada para que o produto escalar $d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \cdot d\mathbf{X}_3 > 0$, o volume do paralelepípedo pode ser obtido por:

$$dV_0 = d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3 = (\mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{n}_2^0 \times \mathbf{n}_3^0) dX_1 dX_2 dX_3 = dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.3.18)$$

sendo \mathbf{n}_i^0 o vetor unitário na direção $d\mathbf{X}_i$. O volume correspondente na configuração deformada é dado por:

$$\begin{aligned} dV &= d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3 \\ &= [(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1^0) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2^0) \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_3^0)] dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= \det(\mathbf{F}) dX_1 dX_2 dX_3 = J dV_0 \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

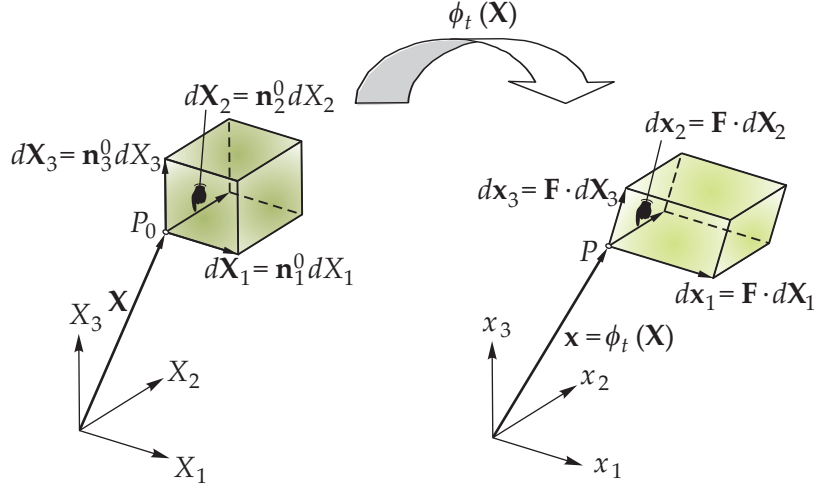


Figura 2.4: Transformação de um elemento de volume através do mapeamento.

Assumindo que os volumes dos elementos sejam positivos, então a orientação relativa dos segmentos é preservada após a deformação, ou seja, $J > 0$. Dessa forma, o determinante do gradiente de deformação tem um significado físico, ele é a razão local do volume atual com o de referência do elemento.

2.3.6 Relação Entre Vetores Normais

Considere-se o vetor de elemento de superfície infinitesimal $d\mathbf{a}_0$ na vizinhança do ponto P_0 na configuração de referência, como mostra a Fig. 2.5. O vetor de área pode ser definido por $d\mathbf{a}_0 = dA_0 \mathbf{n}_0$, em que $d\mathbf{a}_0 = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$ com $\|\mathbf{n}_0\| = 1$ e $dA_0 = \|d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2\|$. Desde que $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2$, a área deformada será $d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{A} \mathbf{n}$, sendo $\|\mathbf{n}\| = 1$ e $dA = \|d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2\|$.

Seja $d\mathbf{X}_3$ um vetor arbitrário na configuração Ω_0 , na configuração deformada Ω , esse mesmo vetor será dado por $d\mathbf{x}_3 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_3$. Além disso, o volume do elemento dV_0 é determinado por:

$$dV_0 = d\mathbf{X}_3 \cdot d\mathbf{a}_0 = d\mathbf{X}_3 \cdot (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \quad (2.3.20)$$

cujo valor é mapeado na configuração atual da seguinte maneira:

$$dV = d\mathbf{x}_3 \cdot d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_3 \cdot (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \quad (2.3.21)$$

A partir da mudança de variáveis proposta pelo mapeamento $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ e da Eq. (2.3.19), pode-se obter $d\mathbf{x}_3 \cdot d\mathbf{a} = J d\mathbf{X}_3 \cdot d\mathbf{a}_0$ o que leva à:

$$\mathbf{F} d\mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{n} dA = J d\mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (2.3.22)$$

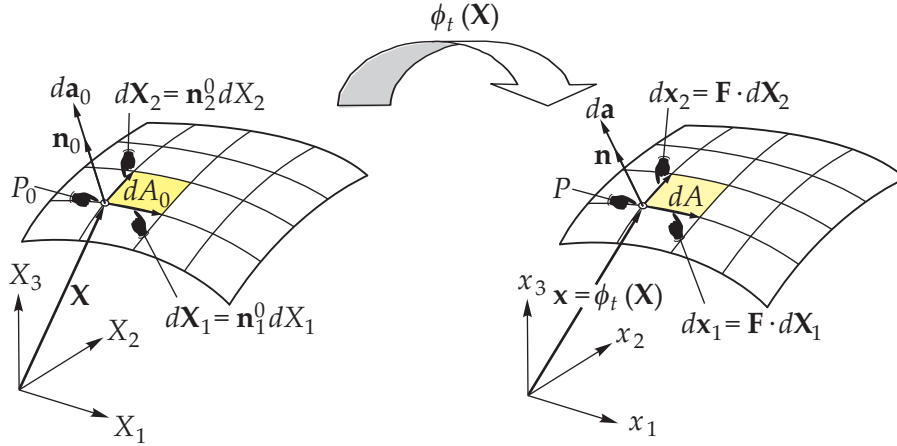


Figura 2.5: Mudança de área associada à relação entre vetores normais.

Com isso,

$$d\mathbf{X}_3 \left(\mathbf{F}^T \mathbf{n} dA - J \mathbf{n}_0 dA_0 \right) = 0 \quad (2.3.23)$$

Como $d\mathbf{X}_3$ é arbitrário e os vetores normais são unitários, a Eq. (2.3.23) fica:

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{a}_0 \quad (2.3.24)$$

2.3.7 As Medidas de Deformação

Com a mudança de geometria sofrida pelo corpo, surge a necessidade de medir a deformação ocasionada. Em contraste com a elasticidade linear, existem muitas maneiras de se medir uma deformação na mecânica não-linear. O tensor de deformações de Green é definido por:

$$ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.3.25)$$

em que ds e dS representam comprimentos de arco e são obtidos através de:

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.3.26)$$

Portanto, a deformação de Green mede a diferença entre os quadrados do comprimento de um segmento infinitesimal na configuração deformada e a configuração indeformada. Para avaliar o tensor de Green, substitui-se a Eq. (2.3.5) em (2.3.26) para produzir:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})^T (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \\ &= d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

sendo que o termo entre parênteses representa o tensor de Cauchy-Green à direita definido em (2.3.16). Assim fica claro o motivo pelo qual esse tensor recebe esse nome. Isso acontece analogamente ao tensor de Cauchy-Green à esquerda.

Usando a Eq. (2.3.27) em (2.3.26), fazendo $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X}$ e substituindo-se em (2.3.25), obtém-se:

$$d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (2.3.28)$$

e fatorando os termos comuns, tem-se:

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I} - 2\mathbf{E}) \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (2.3.29)$$

que deve ser considerado para todo $d\mathbf{X}$ o que implica:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.3.30)$$

O tensor de deformação de Green também pode ser expresso em termos do gradiente de deslocamento. Para isso, é necessário re-escrever o gradiente de deformação \mathbf{F} em função do vetor de deslocamentos o que produz:

$$\mathbf{F} = (\nabla_0 \mathbf{x})^T = (\nabla_0 \mathbf{u} - \mathbf{I})^T \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}^{-1} = (\nabla \mathbf{X})^T = (\mathbf{I} - \nabla \mathbf{u})^T \quad (2.3.31)$$

em que $\nabla_0 \mathbf{u}$ representa o operador gradiente de \mathbf{u} em relação ao vetor de deslocamento \mathbf{X} . Com isso, aplicando (2.3.31) em (2.3.5), tem-se:

$$d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot \nabla_0 \mathbf{u} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) \quad (2.3.32)$$

Agora, o tensor de deformações de Green pode ser expresso em termos do vetor de deslocamentos e com a ajuda da Eq. (2.3.29), chega-se à:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= [d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})] \cdot [d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})] - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})^T \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot [(\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})^T - \mathbf{I}] \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

que deve ser considerado para todo $d\mathbf{X}$, então:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u})^T - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [(\nabla_0 \mathbf{u})^T + \nabla_0 \mathbf{u} + \nabla_0 \mathbf{u} \cdot (\nabla_0 \mathbf{u})^T] \quad (2.3.34)$$

cujos valores ficam mais facilmente identificados ao se escrever em notação indicial o que acarreta

em:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.3.35)$$

Note-se que o tensor de deformação de Green é simétrico, ou seja, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$. Portanto, a Eq. (2.3.34) pode ser colocada na sua forma explícita através das seis componentes cartesianas de deformação por:

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \quad (2.3.36a)$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \quad (2.3.36b)$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \quad (2.3.36c)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \quad (2.3.36d)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (2.3.36e)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (2.3.36f)$$

sendo E_{11}, E_{22} as deformações normais no plano, E_{33} a deformação normal transversal, E_{12} a deformação cisalhante no plano e E_{13} e E_{23} as deformações cisalhantes transversais. Ao observar (2.3.34), percebe-se que se o gradiente de deformação é pequeno, $\nabla \mathbf{u} \ll 1$, os termos de ordem quadrada são desprezados e o tensor de deformação de Green se reduz a um tensor de deformação infinitesimal ($\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$) dado pela teoria da elasticidade linear.

Observação 2.4. A nomenclatura das medidas de deformação definidas pela Eq. (2.3.36) está particularizada para uma estrutura plana ou laminar (placas ou cascas).

Observação 2.5. Existem outras medidas de deformação finita utilizadas na análise não-linear da mecânica do contínuo. A característica comum de todas elas é que essas medidas preveem deformações nulas para movimentos de corpo rígido arbitrários e devem ser reduzidas às deformações infinitesimais se os termos não-lineares forem negligenciados (ver Tab. 2.1).

Observação 2.6. Neste ponto da formulação, ao utilizar as abordagens Lagrangiana ou Euleriana, seria necessário deduzir expressões para taxa de deformação. Entretanto, na formulação CR isso não é necessário, pois existe um sistema corrotacionado que acompanha o elemento. Denotando uma grande vantagem para esse tipo de elemento, uma vez que ao trabalhar com essas taxas de deformação, traz-se um grande inconveniente ao modelo devido à complexidade de tais expressões.

Tabela 2.1: Medidas de deformação uniaxial utilizadas na análise não-linear da Mecânica do Contínuo referentes a uma barra de comprimento inicial L_0 e final L .

Descrição	Equação
Deformação de Green ¹ :	$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$
Deformação de Almansi ² :	$\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}$
Deformação de Hencky ³ :	$\varepsilon_H = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right)$
Deformação Média ⁴ :	$\varepsilon_M = \frac{L^2 - L_0^2}{2 \left(\frac{L+L_0}{2} \right)^2}$
Deformação de Engenharia ⁵ :	$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L}$

2.3.8 Interpretação Física das Componentes de E

Com o intuito de avaliar o significado físico da componente de deformação E_{11} do tensor de Green, considere-se um corpo sem se deformar contendo um segmento de reta inicialmente paralelo ao eixo X_1 e que $d\mathbf{X} = dX_1 \hat{\mathbf{E}}_1$, conforme apresenta a Fig. 2.6(a). Então,

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j = 2E_{11} dX_1 dX_1 = 2E_{11} (dS)^2 \quad (2.3.37)$$

Resolvendo E_{11} na Eq. (2.3.37) fica:

$$E_{11} = \frac{(ds)^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{dS} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.3.38)$$

e isolando o termo entre parênteses produz:

$$\frac{ds}{dS} = \sqrt{1 + 2E_{11}} = 1 + E_{11} - \frac{1}{2}E_{11}^2 + \dots \quad (2.3.39)$$

Em termos na extensão unitária $\Lambda_1 = \frac{ds}{dS} - 1$, têm-se (incluindo os termos quadrá-

¹ Note que a diferença entre a deformação de Green e de Almansi é muito sutil, ou seja, a primeira é em relação ao comprimento antes da deformação, enquanto a segunda é em relação ao comprimento final. A deformação de Green será a utilizada neste trabalho.

² Por estar em relação à configuração deformada, a deformação de Almansi é também chamada de deformação Euleriana.

³ A deformação de Hencky é também chamada de Logarítmica.

⁴ A deformação média, que é uma boa aproximação da deformação de Hencky, é frequentemente utilizada em análises de plasticidade ou viscoplasticidade que envolvam grandes deformações, pois é mais fácil de se computar.

⁵ A deformação de engenharia nada mais é do que a deformação de Green levando em conta apenas os termos lineares.

ticos):

$$E_{11} = \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_1^2 \quad (2.3.40)$$

Para o caso particular em que a extensão unitária Λ_1 é muito pequena, o termo quadrático da Eq. (2.3.40) pode ser omitido em comparação ao termo linear e a componente E_{11} é aproximadamente igual a extensão unitária Λ_1 . Dessa forma, E_{11} é a razão entre a mudança do seu comprimento com o comprimento original.

As componentes cisalhantes de \mathbf{E} , ou seja, E_{ij} para $i \neq j$, podem ser interpretadas como uma medida da variação angular entre dois segmentos perpendiculares entre si na configuração indeformada. A Fig. 2.6(b) mostra os elementos $d\mathbf{X}_1 = dX_1 \hat{\mathbf{E}}_1$ e $d\mathbf{X}_2 = dX_2 \hat{\mathbf{E}}_2$ quando o corpo ainda não se deformou cujas respectivas posições, após a deformação, são dadas por $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$.

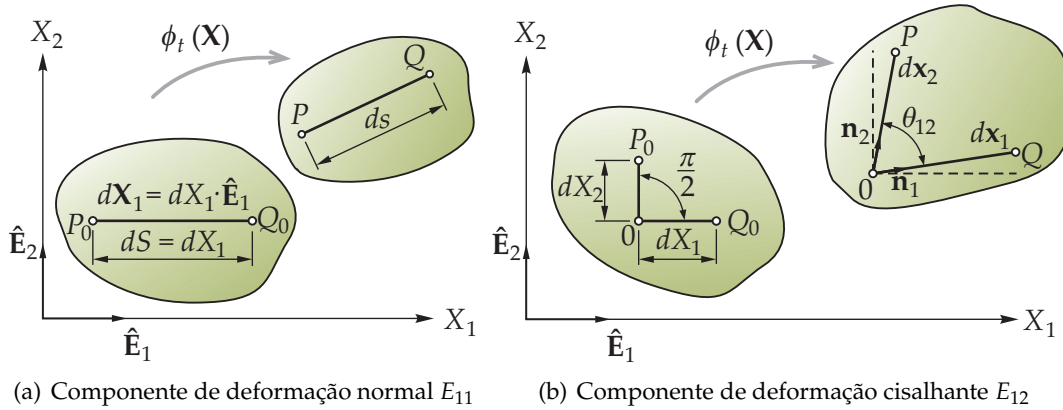


Figura 2.6: Interpretação física das componentes do tensor de deformação de Green, \mathbf{E} .

Logo, o cosseno do ângulo formado pelos segmentos \overline{OP} e \overline{OQ} após a deformação do corpo, com o auxílio da Eq. (2.3.5), é dado por:

$$\cos \theta_{12} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \cdot \|d\mathbf{x}_2\|} = \frac{(d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{F}^T) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_2)}{\sqrt{d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_1} \cdot \sqrt{d\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}_2}} \quad (2.3.41)$$

Lembrando que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$, fazendo $\mathbf{n}_1^0 = \hat{\mathbf{E}}_1$, $\mathbf{n}_2^0 = \hat{\mathbf{E}}_2$ e $\mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{n}_2^0 = 1$, então:

$$\cos \theta_{12} = \frac{\mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2^0}{\sqrt{\mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1^0} \cdot \sqrt{\mathbf{n}_2^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2^0}} = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}} \sqrt{C_{22}}} \quad (2.3.42)$$

ou

$$\theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (2.3.43)$$

que, claramente, mostra como a componente de deformação cisalhante não depende somente do ângulo θ_{12} , mas também dos alongamentos ou encurtamentos envolvidos. Quando a extensão unitária e a mudança de ângulo são pequenos em relação ao valor unitário, pode-se dizer que $\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \approx \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) = \cos \theta_{12} \approx 2E_{12}$.

Observação 2.7. Não confundir as deformações E_{ij} com o módulo de elasticidade de Young E_i .

2.4 Grandezas Linearizadas

2.4.1 Linearização do Gradiente de Deformação

As grandezas relacionadas com as deformações definidas na seção anterior são expressões não-lineares em termos do movimento ϕ . Consequentemente, as equações que governam o problema matemático precisam ser linearizadas a fim de utilizar o método de Newton-Raphson para solução do sistema.

Examinando o deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ da configuração atual conforme mostrado pela Fig. 2.2 e aplicando a Eq. (2.2.1), o gradiente de deformação pode ser linearizado na direção de \mathbf{u} por:

$$\begin{aligned} DF(\phi_t)[\mathbf{u}] &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{F}(\phi_t + \epsilon \mathbf{u}) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \frac{\partial(\phi_t + \epsilon \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial \mathbf{X}} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Observe que se \mathbf{u} foi dado em função da posição inicial do corpo, então:

$$DF(\mathbf{X})[\mathbf{u}] = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \mathbf{u} \quad (2.4.2)$$

em que $DF(\mathbf{X})[\mathbf{u}]$ representa a derivada direcional que opera linearmente em \mathbf{u} , ou em outras palavras, o gradiente de \mathbf{F} na direção de \mathbf{X} com incremento \mathbf{u} .

2.4.2 Linearização das Deformações

Para tratar da linearização da medida de deformação, é necessário introduzir uma propriedade da derivada deformacional:

- Seja $\mathcal{F}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{F}_1(\mathbf{x}_0) \cdot \mathcal{F}_2(\mathbf{x}_0)$, onde o operador “ \cdot ” indica qualquer tipo de produto, então:

$$D\mathcal{F}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] = D\mathcal{F}_1(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] \cdot \mathcal{F}_2(\mathbf{x}_0) + \mathcal{F}_1(\mathbf{x}_0) \cdot D\mathcal{F}_2(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}] \quad (2.4.3)$$

Com isso, pode-se aplicar a Eq. (2.4.3) em (2.4.1) para a deformação dada por (2.3.34), de tal maneira que a linearização para a medida de deformação fica:

$$\begin{aligned} DE[\mathbf{u}] &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T D\mathbf{F}[\mathbf{u}] + D\mathbf{F}^T[\mathbf{u}] \mathbf{F} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Note que os termos entre colchetes é a parte linear da Eq. (2.3.34), logo, denota o tensor de Green para pequenas deformações ε . Dessa forma, $DE[\mathbf{u}]$ pode ser interpretado como uma função suave do tensor de pequenas deformações como:

$$DE[\mathbf{u}] = \mathbf{F}^T \varepsilon \mathbf{F} \quad (2.4.5)$$

No caso particular da linearização ser feita na configuração inicial, ou seja, quando $\mathbf{x} = \mathbf{X}$, então não haverá gradiente de deformação o que acarretará em $DE[\mathbf{u}] = \varepsilon$. Analogamente, os tensores de deformação de Green à direita e à esquerda obtidos por (2.3.16) e podem ser linearizados, respectivamente, da seguinte forma:

$$DC[\mathbf{u}] = 2\mathbf{F}^T \varepsilon \mathbf{F} \quad (2.4.6a)$$

$$DB[\mathbf{u}] = (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.4.6b)$$

2.5 Análise de Tensões

No início deste capítulo, foi introduzida a necessidade de estudar, além das deformações, as tensões num determinado sistema mecânico. Com a deformação de um corpo genérico, surge um estado de tensões associado à ele. Ademais, todos os materiais têm certos limites às forças aplicadas, além dos quais a falha ocorre. A força por unidade de área, chamada de *tensão*, é a medida de capacidade de suportar tais carregamentos.

2.5.1 Tensor de Tensões de Cauchy

Antes de demonstrar o tensor de tensões de Cauchy, é necessário introduzir o conceito de *tensão verdadeira*, isto é, a tensão na configuração deformada Ω que é medida pela unidade de área dessa configuração. A força superficial atuando em um elemento infinitesimal de área no meio contínuo não depende somente da magnitude da área, mas também de sua orientação.

Por essa razão, considera-se um corpo deformável genérico na sua configuração atual como mostra a Fig 2.7 em que forças e condições de carregamento diversos são aplicados. Com o intuito de desenvolver os conceitos de tensão, é necessário passar um plano cortante no sólido a fim de avaliar as forças aplicadas. Seja o vetor \mathbf{n} normal ao elemento de

área ΔA , se a força resultante nessa área é $\Delta \mathbf{f}$, o vetor tração correspondente à normal \mathbf{n} no ponto de atuação de $\Delta \mathbf{f}$ é definido por:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} \quad (2.5.1)$$

em que a relação entre \mathbf{t} e \mathbf{n} deve ser satisfeita pela terceira lei de Newton de ação e reação, que pode ser expressa como $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

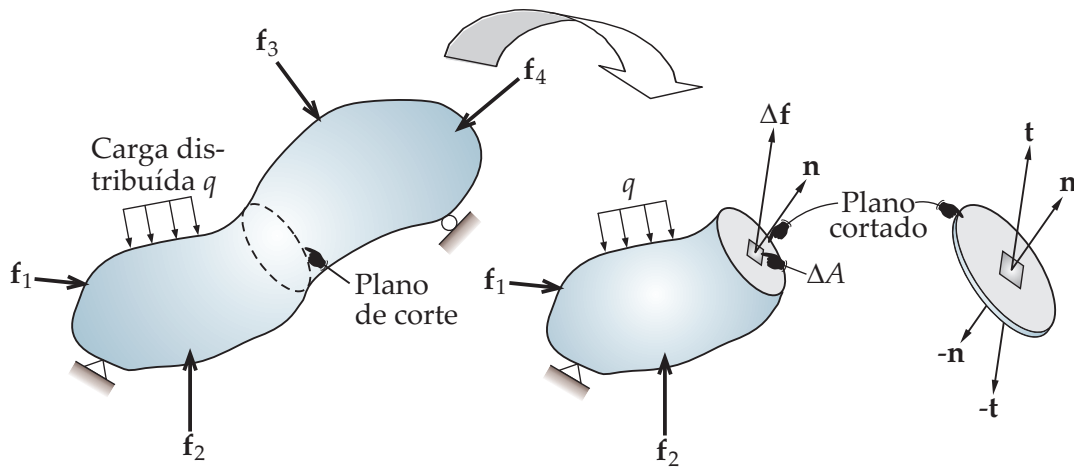


Figura 2.7: Corpo genérico com diferentes condições de contorno e carregamento, cortado por um plano para explicitar o vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Em um ponto fixo \mathbf{x} para cada vetor normal unitário dado \mathbf{n} , existe um vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ atuando no plano normal à \mathbf{n} . Em geral, a direção de $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ não é a mesma de \mathbf{n} . Para estabelecer uma relação entre \mathbf{t} e \mathbf{n} , considere-se o tetraedro infinitesimal em coordenadas cartesianas mostrado pela Fig. 2.8. Se $-\mathbf{t}_1, -\mathbf{t}_2, -\mathbf{t}_3$ e \mathbf{t} denotam os vetores de tensão nas direções para fora das faces do tetraedro infinitesimal cujas áreas são dadas por $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$ e ΔA , respectivamente, aplicando a segunda Lei de Newton para a massa dentro do tetraedro, tem-se:

$$\mathbf{t}\Delta A - \mathbf{t}_1\Delta A_1 - \mathbf{t}_2\Delta A_2 - \mathbf{t}_3\Delta A_3 + \rho\Delta V\mathbf{f} = \rho\Delta V\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.5.2)$$

onde V representa o volume do tetraedro, ρ é a densidade, \mathbf{f} é a força de corpo por unidade de área e $\ddot{\mathbf{u}}$ é a aceleração (pois, $\ddot{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{u}}$).

Definindo,

$$\Delta A_1 = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)\Delta A, \quad \Delta A_2 = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2)\Delta A \quad \text{e} \quad \Delta A_3 = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\Delta A \quad (2.5.3)$$

Lembrando que o volume do tetraedro pode ser dado por $\Delta V = \frac{\Delta h}{3}\Delta A$, em que Δh é a distância perpendicular da origem até a face oposta inclinada e substituindo na Eq. (2.5.2)

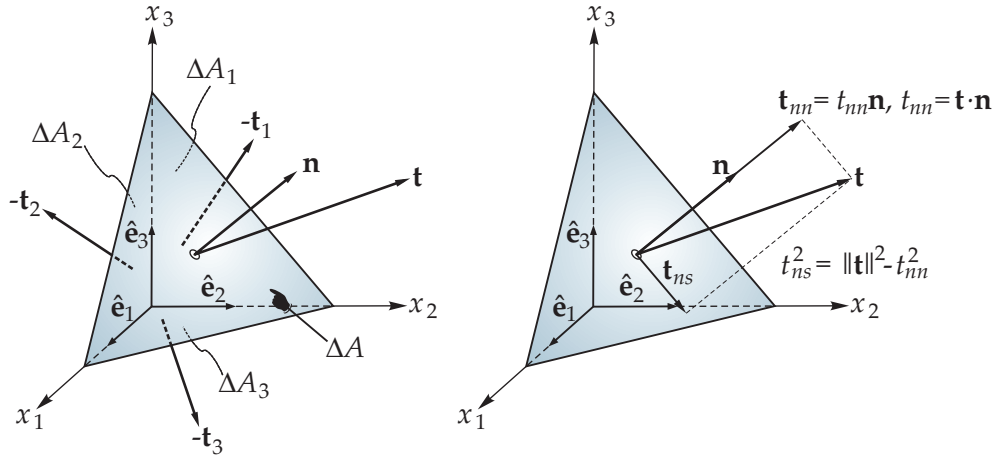


Figura 2.8: Elemento tetraédrico infinitesimal.

chega-se à:

$$\mathbf{t} = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2)\mathbf{t}_2 + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\mathbf{t}_3 + \rho \frac{\Delta h}{3}(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \quad (2.5.4)$$

No limite, quando o volume do tetraedro diminui para um ponto, $\Delta h \rightarrow 0$, logo

$$\mathbf{t} = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i)\mathbf{t}_i = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1)\mathbf{t}_1 + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2)\mathbf{t}_2 + (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3)\mathbf{t}_3 \quad (2.5.5)$$

A seguir, é conveniente dispor a Eq. (2.5.5) da seguinte maneira:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1\mathbf{t}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\mathbf{t}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{t}_3) \quad (2.5.6)$$

sendo o termo entre parênteses o tensor σ , conhecido como *tensor de tensões de Cauchy* que é obtido por:

$$\sigma = \hat{\mathbf{e}}_1\mathbf{t}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\mathbf{t}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{t}_3 \quad (2.5.7)$$

Assim, fica claro que o tensor de tensões de Cauchy tem uma propriedade do meio que é independente de \mathbf{n} . Dessa forma, comparando as Eqs. (2.5.5) e (2.5.6), tem-se:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \sigma = \sigma^T \cdot \mathbf{n} \quad (2.5.8)$$

e a dependência de \mathbf{t} em \mathbf{n} foi explicitamente mostrada. Assim, pode-se definir a partir do vetor tensão a seguinte expressão:

$$t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad \text{e} \quad t_{ns} = \sqrt{\|\mathbf{t}\|^2 - t_{nn}^2} \quad (2.5.9)$$

em que t_{nn} e t_{ns} simbolizam as magnitudes de \mathbf{t} nas direções de \mathbf{n} e perpendicular à \mathbf{n} , res-

pectivamente, ver Fig. 2.8.

Observação 2.8. Ao observar as equações, percebe-se que o tensor de tensões de Cauchy é definido por uma relação entre a força atual por unidade de área deformada.

Como o tensor de tensões de Cauchy é simétrico, pode-se re-escrever (2.5.8) em sua forma matricial, o que produz:

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (2.5.10)$$

É útil obter os vetores de tensão \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{t}_3 e suas componentes ortogonais no sistema cartesiano, ou seja, em função de $\hat{\mathbf{e}}$, de tal maneira que:

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{i1}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{i2}\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{i3}\hat{\mathbf{e}}_3 \quad (2.5.11)$$

para $i = 1, 2, 3$. Com isso, o tensor de tensões de Cauchy pode ser expresso segundo as suas componentes cartesianas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{e}}_i \mathbf{t}_i = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \quad (2.5.12)$$

As componentes σ_{ij} representam as tensões no plano perpendicular à coordenada x_i e na direção da coordenada x_j , como ilustra a Fig. 2.9.

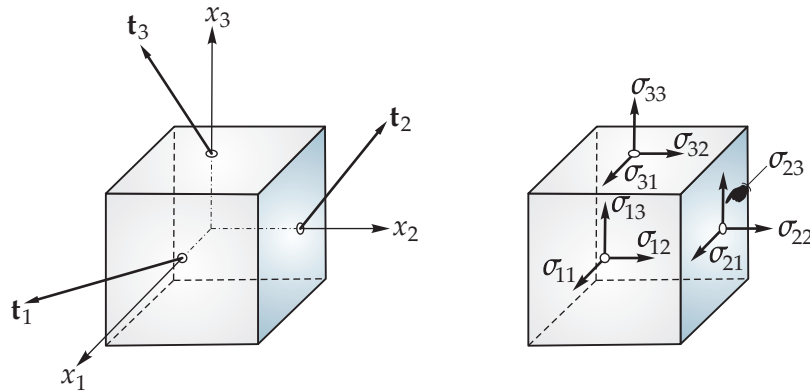


Figura 2.9: Cubo elementar enfatizando as componentes de tensão em coordenadas cartesianas.

2.5.2 Os Tensores de Piola-Kirchhoff

O tensor de tensões de Cauchy visto no tópico anterior é uma medida mais natural e física do estado de tensões em um ponto da configuração deformada. É a quantidade mais comumente utilizada em problemas da mecânica dos fluidos. Entretanto, uma vez que

a geometria deformada não é conhecida, as equações de equilíbrio devem ser escritas em termos da configuração de referência conhecida. Surgem, então, outras medidas de tensões, de caráter puramente matemático, com o intuito de facilitar a análise.

Em problemas não-lineares, duas medidas de tensão podem ser definidas: o primeiro e segundo tensores de Piola-Kirchhoff comumente abreviados por PK1 e PK2, respectivamente. Inicialmente, considere-se a Fig. 2.10 que mostra uma força $d\mathbf{f}$ atuando em um elemento infinitesimal de área dA cuja normal é dada por \mathbf{n} na configuração deformada.

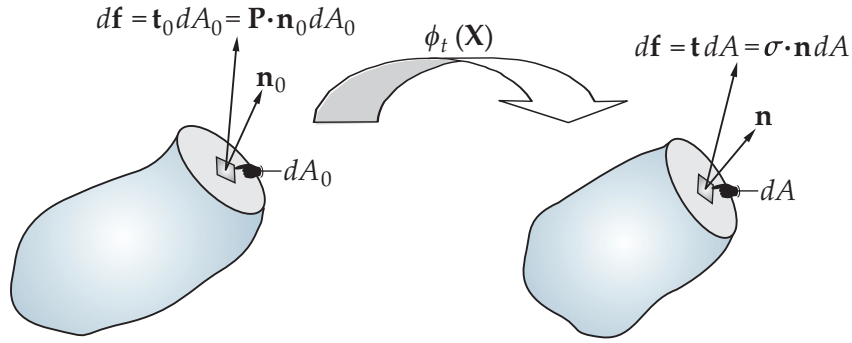


Figura 2.10: Definição dos tensores de Piola-Kirchhoff.

Suponha que o elemento infinitesimal de área na configuração indeformada seja dado por dA_0 , então, na configuração deformada a área correspondente será dA e a força $d\mathbf{f}$ pode ser expressa por:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n})dA \quad (2.5.13)$$

Definindo agora o vetor de tensão \mathbf{t}_0 sobre a área do elemento dA_0 com normal \mathbf{n}_0 na configuração de referência de tal forma que resulte na mesma força total, ou seja:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n})dA = \mathbf{t}_0(\mathbf{n}_0)dA_0 \quad (2.5.14)$$

Claramente, ambos os vetores de tensão têm a mesma direção, porém, com magnitudes diferentes ocasionadas pela mudança de área. O vetor tensão $\mathbf{t}_0(\mathbf{n}_0)$ é mensurado por unidade de área indeformada, enquanto que $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ é medido por unidade de área deformada.

Definindo a relação de Nanson, cujo intuito é relacionar os vetores normais das duas configurações (como foi introduzido na seção 2.3.6):

$$\mathbf{n}dA = J\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1}dA_0 \quad (2.5.15)$$

Substituindo (2.5.8) em (2.5.14) para desenvolver uma expressão para a tensão no-

minal em termos da tensão de Cauchy, tem-se:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dA = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} dA_0 \quad (2.5.16)$$

em que \mathbf{P} é o *primeiro tensor de Piola-Kichhoff*. O vetor de tensão $\mathbf{t}_0(\mathbf{n}_0)$ está relacionado com PK1 que pode ser representado em suas coordenadas cartesianas por:

$$\mathbf{P} = P_{iI} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{E}}_I \quad (2.5.17)$$

Nota-se evidentemente que PK1 é um tensor proveniente de uma combinação entre configurações deformada e indeformada. Desde que a Eq. (2.5.16) seja para todo \mathbf{n}_0 e aplicando a fórmula de Nanson (2.5.15), obtém-se:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.5.18)$$

Em geral, não obstante o tensor de tensões de Cauchy seja simétrico o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é não simétrico, isto é, $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$.

A seguir, para obter PK2, define-se:

$$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S} dA_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 dA_0 \quad (2.5.19)$$

sendo \mathbf{S} o *segundo tensor de Piola-Kichhoff*. A tensão nominal pode ser relacionada com PK2 multiplicando-se o lado esquerdo de (2.5.19) por \mathbf{F} , o que resulta em:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{S}) dA_0 = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{n}_0) dA_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (2.5.20)$$

A força $d\mathbf{f}$ pode ser re-escrita em função de PK1, ou seja, comparando-se as Eqs. (2.5.16) e (2.5.20), chega-se à:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} dA_0 = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (2.5.21)$$

Desde que (2.5.21) seja para todo \mathbf{n}_0 , pode-se relacionar o PK1 com o PK2 através de:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.5.22)$$

Comparando (2.5.18) com (2.5.22), expressa-se o tensor de tensões de Cauchy em termos de PK2 e do gradiente de deformação por meio de:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.5.23)$$

que pode ser invertido para obter PK2 em função das tensões de Cauchy:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.5.24)$$

Em termos de suas componentes cartesianas, o PK2 pode ser re-escrito por:

$$\mathbf{S} = S_{IJ} \hat{\mathbf{E}}_I \hat{\mathbf{E}}_J \quad (2.5.25)$$

Fica claro ao observar (2.5.24) que esse tensor é simétrico, portanto, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$.

Observação 2.9. Note que a Eq. (2.5.17) relaciona $\frac{\text{força}}{\text{área final}}$ e $\frac{\text{força}}{\text{área inicial}}$ em termos da configuração atual; enquanto o segundo tensor de Piola-Kirchhoff se refere à configuração original.

Por fim, é definido o tensor de tensões de Kirchhoff por:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (2.5.26)$$

cujo objetivo é relacionar o tensor de tensões de Cauchy com o determinante do gradiente de deformação. Assim, as relações entre PK1, PK2 e as tensões de Cauchy e Kirchhoff definidas por (2.5.7), (2.5.18), (2.5.24) e (2.5.26) dependem somente do gradiente de deformação \mathbf{F} e do seu respectivo determinante $J = \det(\mathbf{F})$. Dessa forma, se a deformação é conhecida, o estado de tensões pode ser expresso em termos de $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{P} , \mathbf{S} ou $\boldsymbol{\tau}$.

2.5.3 Tensões no Sistema Corrotacionado

Na abordagem corrotacional, o sistema é construído para cada partícula do corpo com os vetores de base $\bar{\mathbf{e}}_i$ como foi amplamente visto nos capítulos 3 e 4. Assim, o sistema é rotacionado com o material ou elemento. Por isso, a metodologia da descrição CR é frequentemente interpretada como um sistema de coordenadas curvilíneas cujos vetores base $\bar{\mathbf{e}}_i$ são funções de \mathbf{x} . Embora esse raciocínio seja equivocado, ao utilizar a formulação CR é possível obter as deformações de maneira correta para estruturas com acentuada curvatura, não obstante o elemento não possua curvatura (como é o caso deste trabalho, pois é plano).

O tensor de tensões de Cauchy definido em (2.4.2) pode ser expresso no sistema corrotacionado por:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \quad (2.5.27)$$

O tensor de tensões de Cauchy corrotacional é o mesmo tensor das tensões de Cauchy, entretanto, ele é expresso em termos das componentes em um sistema de coordenadas que rotaciona com o material. Em outras palavras, o tensor não depende do sistema de coordenadas ao qual as suas componentes são expressas.

Analogamente, faz-se o mesmo procedimento para os tensores PK1, PK2 e τ , respectivamente, de tal maneira que após algum algebrismo:

$$\mathbf{P} = J \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.5.28a)$$

$$\mathbf{S} = J \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad (2.5.28b)$$

$$\tau = J \mathbf{R} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T \quad (2.5.28c)$$

Com isso, a Tab. 2.2 sumariza todas as relações possíveis entre as tensões tanto no sistema global como no corrotacionado.

Tabela 2.2: Correlação entre os tensores de tensão utilizados na análise não-linear.

	Tensor de Cauchy, σ	PK1, \mathbf{P}	PK2, \mathbf{S}	Cauchy corrotacionado, $\bar{\sigma}$
$\sigma =$		$J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$	$J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$\mathbf{R} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$
$\mathbf{P} =$	$J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$		$\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$J \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$
$\mathbf{S} =$	$J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}$	$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{-T}$		$J \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{U}^{-1}$
$\tau =$	$J \sigma$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$	$J \mathbf{R} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T$
$\bar{\sigma} =$	$\mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}$	$J^{-1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$	$J^{-1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}$	

Lembrete: $dx = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}$; ver Eqs. (2.3.5) e (2.3.14).

\mathbf{U} representa o tensor de alongamento ou encurtamento; ver Eqs. (2.3.11), (2.3.14) e (2.3.16).

Observação 2.10. O tensor de tensões de Cauchy corrotacional, $\bar{\sigma}$, também é conhecido como tensor de tensões rotacionadas.

2.6 Equações de Equilíbrio

O campo de tensões em um sólido elástico é continuamente distribuído no corpo e unicamente determinado a partir do carregamento aplicado. Esses carregamentos devem satisfazer as equações de equilíbrio estático, ou seja, o somatório de todas as forças e momentos aplicados no corpo devem ser nulos. Se todo o corpo está em equilíbrio, então todas as partes devem também estar em equilíbrio. Assim, pode-se dividir o sólido em subdomínios e aplicar o princípio de equilíbrio naquela sub-região. Com essa abordagem, as equações de equilíbrio podem ser desenvolvidas para expressar o equilíbrio do sólido em um ponto contínuo do material.

2.6.1 Equilíbrio de Translação

Com o intuito de derivar as equações diferenciais de equilíbrio estático, a Fig. 2.11 apresenta a configuração deformada de um corpo genérico deformável definido pelo volume V com área superficial ∂S . A seguir, assume-se que o corpo esteja sob efeito de forças de

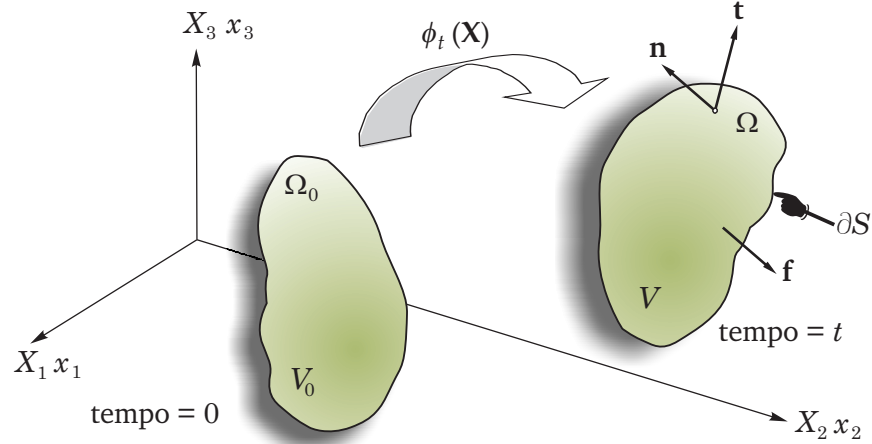


Figura 2.11: Equilíbrio estático de um corpo genérico deformável \mathcal{B} no meio contínuo submetido às forças de corpo e de superfície.

corpo por unidade de volume \mathbf{f} e forças trativa por unidade de área \mathbf{t} atuando no contorno do corpo. Para simplificar a análise, forças inerciais são desconsideradas. Portanto, o equilíbrio translacional é obtido desde que a soma de todas as forças atuantes no corpo seja nula. Em outras palavras, a partir do princípio de conservação do momento linear, que comumente é conhecido por segunda Lei de Newton do movimento, as forças atuantes nessa região são equilibradas e, com isso, a força resultante deve ser nula. Esse conceito pode ser expresso por:

$$\underbrace{\int_{\partial S} \mathbf{t} dA}_{\text{Forças de superfície}} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{f} dV}_{\text{Forças de corpo}} = \mathbf{0} \quad (2.6.1)$$

Utilizando a Eq. (2.5.8) para que a tração seja expressa em função das tensões de Cauchy, tem-se:

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV = \mathbf{0} \quad (2.6.2)$$

O primeiro termo de (2.6.2) pode ser transformado em uma integral de volume por meio do teorema de Gauss $\left(\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \text{div}(\mathbf{v}) dV \right)$ o que produz,

$$\int_V [\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f}] dV = \mathbf{0} \quad (2.6.3)$$

em que $\text{div}(\boldsymbol{\sigma})$ representa o operador divergente de $\boldsymbol{\sigma}$ e é dado por:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \quad (2.6.4)$$

O fato de que (2.6.3) pode ser igualmente aplicado a qualquer região fechada do corpo, devido à arbitrariedade de V , implica no desaparecimento da integral, isto é,

$$\text{div}(\sigma) + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.6.5)$$

Essa expressão é conhecida como *equação de equilíbrio espacial local* para um corpo deformável que no contexto do método de solução iterativa, o equilíbrio definido por (2.6.5) ainda não foi atingido e se faz: $\mathbf{r} = \text{div}(\sigma) + \rho \mathbf{f}$ para equilibrar o sistema. A Eq. (2.6.5) pode ser re-escrita em sua forma indicial como:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \quad (2.6.6)$$

ou mais explicitamente por,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = 0 \quad (2.6.7a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = 0 \quad (2.6.7b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = 0 \quad (2.6.7c)$$

2.6.2 Equilíbrio de Rotação

Para se alcançar o equilíbrio rotacional de um corpo genérico sob ação de forças de corpo e de superfície, é necessário que o momento total de todas as forças aplicadas sobre qualquer ponto arbitrário, tal como a origem, seja nulo. Aplicando esse princípio na região mostrada pela Fig.2.11, resulta em:

$$\int_{\partial S} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dA + \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV = \mathbf{0} \quad (2.6.8)$$

sendo que se deve lembrar que o produto vetorial de uma força pelo vetor posição \mathbf{x} produz um momento de todas as forças sobre a origem. Novamente, usando a Eq. (2.5.8), permite re-escrever (2.6.8) da seguinte forma:

$$\int_{\partial S} [\mathbf{x} \times (\sigma \cdot \mathbf{n})] dA + \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV = \mathbf{0} \quad (2.6.9)$$

Empregando o teorema de Gauss e depois de extensa álgebra demonstrada por Bonet e Wood [17], a Eq. (2.6.9) se torna:

$$\int_V \left\{ [\mathbf{x} \times \text{div}(\sigma)] + (\mathcal{E} : \sigma^T) + (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) \right\} dV = \mathbf{0} \quad (2.6.10)$$

em que \mathcal{E} é o tensor de terceira ordem de permutação definido por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 \\ & - \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 - \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (2.6.11a)$$

Portanto,

$$\mathcal{E}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ estão em ordem cíclica e não repetidos } (i \neq j \neq k) \\ -1, & \text{se } ijk \text{ não estão em ordem cíclica e não repetidos } (i \neq j \neq k) \\ 0, & \text{se qualquer um dos índices forem repetidos} \end{cases} \quad (2.6.11b)$$

Como a dupla contração de um tensor de terceira ordem por um de segunda ordem resulta em um tensor de primeira ordem, ou seja, um vetor e lembrando que o resultado da dupla contração é válida para região fechada do sólido, então a segunda parcela da Eq. (2.6.10) fica:

$$\mathcal{E} : \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{Bmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.6.12)$$

Ao observar a Eq. (2.6.12), claramente se percebe a simetria do tensor de tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$.

Outra maneira de visualizar essa simetria é estabelecida ao se aplicar a segunda Lei de Newton para o momento, conforme mostra a Fig. 2.12. Considerando todas as forças atuantes no paralelepípedo sobre o eixo x_3 , e empregando a regra da mão direita para o sentido positivo do momento, tem-se:

$$\begin{aligned}& \left[\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \right] \frac{dx_1}{2} + (\sigma_{12} dx_2 dx_3) \frac{dx_1}{2} \\ & - \left[\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \right] \frac{dx_2}{2} + (\sigma_{21} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} = 0\end{aligned}\quad (2.6.13)$$

Multiplicando por $2 dx_1 dx_2 dx_3$ e pegando o limite de $dx_1 \rightarrow 0$ e $dx_2 \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \quad \therefore \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (2.6.14)$$

Considerações similares são feitas calculando-se os momentos em torno dos eixos x_1 e x_2 , respectivamente, o que acarreta em:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad \text{e} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (2.6.15)$$

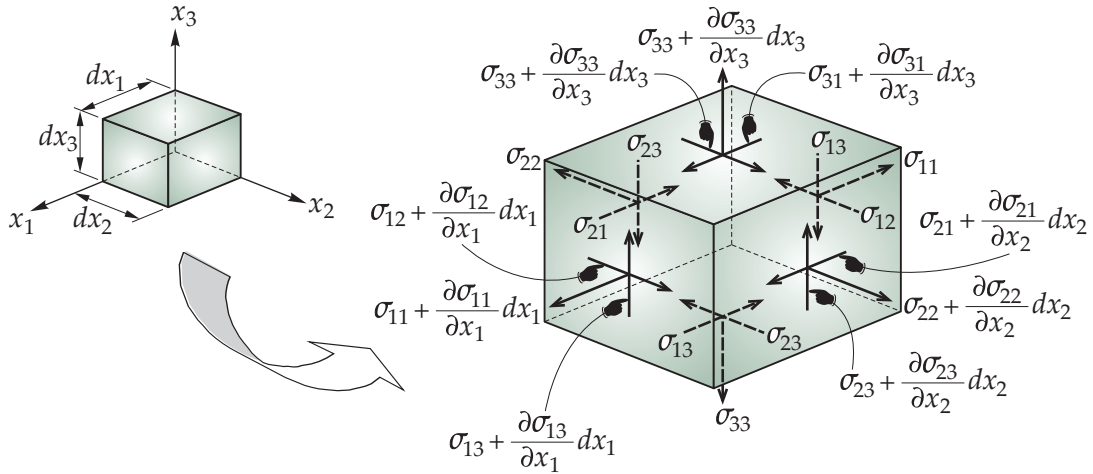


Figura 2.12: Tensões em um paralelepípedo infinitesimal.

2.7 A Hiperelasticidade ou Elasticidade de Green

2.7.1 Aspectos Iniciais

Para que um material seja considerado idealmente linear, o corpo deve recuperar sua forma original quando as forças que causam a deformação sejam removidas, sob condições isotérmicas, e existir uma relação única entre os estados de tensão e deformação. O trabalho feito pela tensão é, em geral, dependente do caminho de deformação. Segundo Reddy [85], para materiais elásticos, as tensões de Cauchy não dependem da trajetória de equilíbrio, mas somente do estado atual de deformação. Sob tais aspectos, pode-se dizer que $\sigma = \sigma(\mathbf{F})$.

Para Bonet e Wood [17], qualquer tensão medida de uma partícula para uma material elástico cuja posição é dada por \mathbf{X} será função do gradiente de deformação \mathbf{F} atual associado à essa partícula, ou seja, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$. Ainda segundo esses autores, especialmente quando o trabalho realizado pelas tensões durante o processo de deformação depende somente dos estados inicial t_0 e final t , o comportamento do material independe da trajetória de equilíbrio e o material é chamado de *hiperelástico* ou *Green elástico*. Note que é a mesma definição apresentada por Reddy [85], porém de uma forma particularizada.

2.7.2 Descrição Matemática do Problema

Na elasticidade finita, é necessário escolher uma das medidas de deformação introduzidas na seção 2.3.7 e definir o potencial elástico (trabalho conjugado) para a tensão. A existência de um potencial implica em reversibilidade, independência de trajetória de equilíbrio e ausência de dissipação no processo de deformação.

Observação 2.11. *Independência de trajetória de equilíbrio, comportamento reversível e não dissipa-*

tivo estão intimamente relacionados [16].

Apesar de existirem vários modelos hiperelásticos na literatura, todos são muito similares entre si. O modelo utilizado nesta tese é o proposto por Simo e Hughes [93] com algumas adaptações.

Inicialmente, define-se matematicamente o problema como $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sendo a configuração de referência de interesse do corpo. Assumindo que Ω é aberto, limitado com contorno suave $\partial\Omega$ e seu fechamento dado por $\bar{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cup \partial\Omega$. Seja $[0, t] \subset \mathbb{R}_+$ o intervalo de tempo de interesse, então, o campo de deslocamento pode ser mapeado a partir de:

$$\mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.7.1)$$

Observação 2.12. *As partículas têm posição de referência $\mathbf{x} \in \Omega$ no tempo $t \in [0, t]$.*

O campo de deslocamentos é utilizado para se obter o tensor de deformações de Green dado pela Eq. (2.3.34). Esse é um tensor de segunda ordem e, por ser simétrico, representa uma transformação linear em \mathbb{S} definida por:

$$\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{\xi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\xi} \text{ é linear e } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \right\} \quad (2.7.2a)$$

em que $\boldsymbol{\xi}$ representa um espaço vetorial cujo produto interno é dado por:

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = \text{tr}(\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}) \equiv \xi_{ij} \xi_{ij} \quad (2.7.2b)$$

Frequentemente, identifica-se $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ desde que qualquer $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}$ tenha $\frac{n(n+1)}{2}$ componentes $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ relativas à base padrão $\hat{\mathbf{e}}_i$. Lembrando que o tensor de tensões de Cauchy pode ser obtido a partir do vetor de base unitário, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$. A seguir assume-se que:

$$\overline{\partial\Omega} = \overline{\partial_{\mathbf{u}}\Omega \cup \partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega} \quad \text{e} \quad \partial_{\mathbf{u}}\Omega \cap \partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega \neq \emptyset \quad (2.7.3)$$

sendo que $\partial_{\mathbf{u}}\Omega$ é a parte de $\partial\Omega$ onde os deslocamentos são prescritos como:

$$\mathbf{u}|_{\partial_{\mathbf{u}}\Omega} = \hat{\mathbf{u}} \text{ (dado)} \quad (2.7.4)$$

e $\partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega$ simboliza a parte de $\partial\Omega$ em que as trações são prescritas, de tal forma que:

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\partial_{\boldsymbol{\sigma}}\Omega} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \text{ (dado)} \quad (2.7.5)$$

Agora, seja $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ a força por unidade de massa dada em um campo vetorial definido em $\Omega \times]0, t[$ e a densidade seja definida por $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. A forma local do Problema de

Valor de Contorno (PVC) pode ser matematicamente representado por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \end{aligned} \right\} \quad \text{em } \Omega \times]0, t[\quad (2.7.6)$$

O sistema de equações diferenciais parciais é suplementado pelas condições de contorno especificadas por (2.7.4) e (2.7.5) sujeitas às restrições impostas por (2.7.3) e definindo os dados iniciais como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.7.7)$$

onde $\mathbf{u}_0(\cdot)$ e $\mathbf{v}_0(\cdot)$ são funções prescritas em Ω . Assim, as Eqs. (2.7.6) e (2.7.7) juntamente com as condições de contorno (2.7.4) e (2.7.5) definem o PVC inicial para o campo de deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ quando os campos de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e deslocamento $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ estão relacionados entre si por meio de uma equação constitutiva.

O modelo hiperelástico, como já foi descrito, é aquele em que o estado de tensões é caracterizado em termos de um potencial de energia $W : \Omega \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$, de tal maneira que:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial W[\mathbf{x}, \mathbf{E}(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.7.8)$$

que é a expressão do tensor de tensões. Como o estado de tensões definido por $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser representado pelo PK2 definido em (2.5.24), tem-se:

$$\mathbf{S} = \mathcal{C} : \mathbf{E} \quad (2.7.9a)$$

sendo que \mathcal{C} é um tensor de quarta ordem e é conhecido como *tensor de elasticidade* e relaciona os estados de tensão e deformação de um material e pode ser definido em função do potencial de energia por:

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 W[\mathbf{x}, \mathbf{E}(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (2.7.9b)$$

ou na forma indicial,

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (2.7.9c)$$

Observação 2.13. O tensor de elasticidade \mathcal{C} é simétrico, isto é, $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk}$.

Observação 2.14. Se W não depende de $\mathbf{x} \in \Omega$ ($\partial_{\mathbf{x}} W = 0$), então o material é chamado de *homogêneo*. Ademais, se W não varia rotacionalmente, o material é chamado de *isotrópico*.

Dessa forma, este capítulo apresentou o movimento de um corpo deformável e suas

consequências. Por isso, as deformações relacionadas com o deslocamento do sólido bem como as tensões a ele associadas foram conceituadas e suas expressões definidas. Foram introduzidos os conceitos inerentes à Mecânica do Contínuo que são fundamentais para o entendimento da formulação corrotacional bem como a definição de um material hiperelástico. Assim, o próximo capítulo irá introduzir a formulação corrotacional como hipótese de movimento.

A Formulação Corrotacional

3.1 Introdução

A descrição cinemática Corrotacional (CR) é uma das formulações mais recentes na análise estrutural de não-linearidade geométrica. Devido à sua novidade, ainda não foi alcançado o mesmo nível de maturidade que formulações mais consolidadas como a Lagrangeana Total (LT) e Atualizada (LA). Muito trabalho ainda tem que ser feito, principalmente, em aplicações dinâmicas, de sistemas acoplados e problemas tipicamente não-lineares. A distinção entre essas três descrições se dá pela escolha da configuração de referência. Na LT, a configuração de referência raramente muda. O sistema de eixos coordenados inicial é o mesmo ao longo de toda a análise, ou seja, toda a leitura de tensões, deformações e deslocamentos é obtida em relação ao sistema inicial (fixo). Na LA, quando uma configuração atinge um estado de equilíbrio, essa última configuração passa a ser a nova referência e a extração de qualquer medida de interesse será realizada em relação a este sistema atual.

Entretanto, na descrição corrotacional, a configuração de referência é separada em duas partes: (i) uma configuração inicial ou base (fixa) que é mantida como a referência do sistema para a aferição dos deslocamentos de corpo rígido e (ii) uma configuração chamada de *corrotacionada* (em movimento) que é utilizada para se medirem as tensões e deformações do sólido. Em outras palavras, na formulação CR existem dois sistemas de eixos, um que é mantido fixo para a medição dos deslocamentos de corpo rígido e outro que acompanha o sólido, portanto, em movimento, onde são medidas as deformações do corpo. Isso faz com que a **Condição 1** apresentada na seção 1.3 surja como restrição da formulação.

Devido a esta restrição, a descrição CR ainda não se popularizou nos códigos computacionais que empregam o MEF, principalmente, para códigos de problemas não-lineares. Claro que aliado a esse fator, existe a questão da dificuldade das equações necessárias para a formulação CR. Contudo, essa não é uma questão insolúvel ou que acarrete em algum tipo de desinteresse pela formulação. Para solucionar tal problema, basta aumentar o re-

fino da malha, desde que o problema não seja fortemente não-linear. Na verdade, o grande trunfo da formulação corrotacional está nessa restrição, isto é, uma vez que o modelo permite as grandes rotações e deslocamentos, porém, com pequenas deformações, isso implica na possibilidade de reutilizar a biblioteca existente dos elementos obtidos via MEF. Com isso, pode-se converter um determinado elemento para a formulação CR com pequenas mudanças no código. Vale lembrar que a formulação de um elemento é a parte mais onerosa de um programa comercial e não comercial de elementos finitos, conferindo, assim, uma grande vantagem na utilização da formulação CR.

Em todas as descrições, a configuração dita *deformada* é aquela que pode ser obtida em qualquer momento da análise e que não necessita estar em equilíbrio, isto é, é a configuração depois que o sólido é submetido a algum carregamento. Na literatura, também pode ser chamada de configuração *corrente* ou *espacial* e neste trabalho será simbolizada por \mathcal{C}^D . Portanto, a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacionais do sólido é feita nesta fase do processo, conforme ilustra a Fig. 3.1.

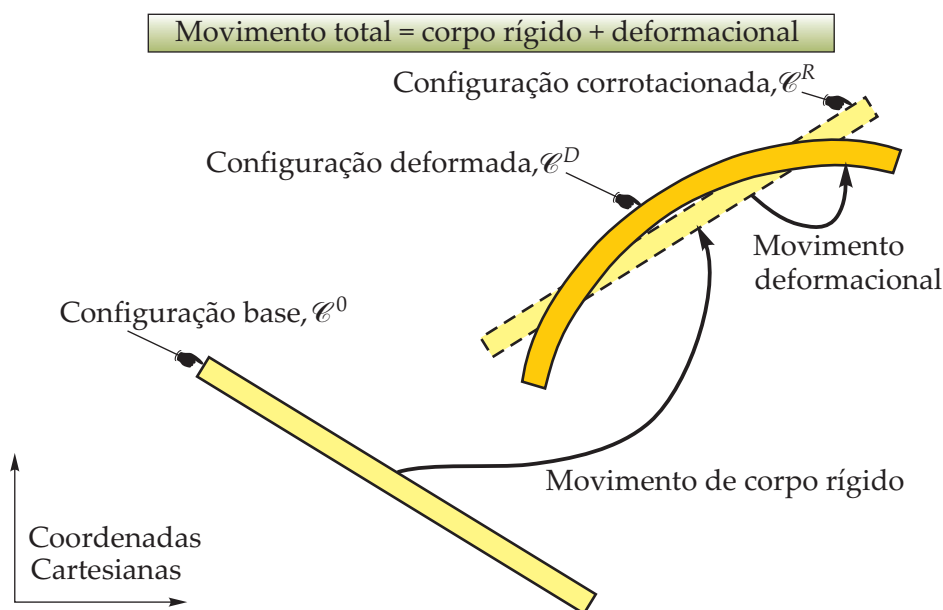


Figura 3.1: A descrição cinemática CR. As deformações entre as configurações corrotacionadas e deformadas foram exageradas para facilitar a visualização.

As duas parcelas provenientes da configuração deformada são:

1. A configuração *base* \mathcal{C}^0 que serve como origem dos deslocamentos é mantida fixa durante toda a análise (em problemas estáticos). Se for a mesma do início da análise, é chamada de *inicial* ou *indeformada*. No contexto da Mecânica do Contínuo, pode ser chamada de configuração *material*.
2. A configuração corrotacionada \mathcal{C}^R varia de elemento a elemento. Para cada elemento, sua configuração corrotacionada é obtida a partir do movimento de corpo rígido em

relação à configuração base \mathcal{C}^0 do elemento. O sistema de coordenadas cartesianas associado ao elemento segue o elemento como um “fantasma”, por isso o nome *ghost element* na literatura escandinava. As deformações são aferidas em relação à configuração corrotacionada \mathcal{C}^R .

Observação 3.1. *A descrição cinemática CR mantém a ortogonalidade do sistema coordenado do elemento, dessa forma, é assegurada a decomposição exata dos movimentos deformacionais e de corpo rígido. Essa propriedade garante uma melhora na eficiência computacional, desde que exista a matriz inversa do tensor que vai mapear uma configuração em outra.*

Em problemas dinâmicos, as configurações base e corrotacionada são chamadas de *configurações de referência inercial e dinâmica*, respectivamente. Nesse caso, a \mathcal{C}^0 pode se mover com velocidade uniforme. Do ponto de vista matemático, a presença da configuração corrotacionada como configuração intermediária entre a inicial e a deformada é desnecessária. Entretanto, esse artifício é bastante útil não só para mostrar o significado físico, mas para visualizar os pontos fortes e as limitações da descrição CR.

3.2 Cinemática Corrotacional

A diferença básica entre a análise estrutural geométrica linear e não-linear reside na cinemática. As condições de equilíbrio devem ser impostas na geometria deformada. Assim, esta seção esboça a cinemática CR dos elementos finitos e as principais expressões das relações mais importantes. Como o escopo desta tese é a análise estática, toda a demonstração será baseada nessa hipótese.

3.2.1 Sistema de Coordenadas

Um elemento finito típico submetido ao movimento bidimensional, para ajudar na visualização, está mostrado na Fig. 3.2. Este diagrama em conjunto com o apresentado pela Fig. 3.3 introduz as quantidades cinemáticas. Toda a notação empregada neste trabalho segue o mesmo apresentado por Felippa e Haugen [29].

As configurações tomadas pelo elemento durante a análise são conectadas por um sistema global cartesiano, em que todos os cálculos computados estão referidos neste último. Na verdade, existem dois sistemas: (i) um com coordenadas materiais com eixos $\{X_i\}$ e vetor posição \mathbf{X} e (ii) outro com coordenadas espaciais com eixos $\{x_i\}$ e vetor posição \mathbf{x} . O sistema material segue a trajetória da configuração base e o sistema espacial rastreia as configurações deformada (corrente) e corrotacional. Essa distinção é coerente com a maioria convencionada por diversos autores na literatura da Mecânica do Contínuo. Neste trabalho, ambos os sistemas são coincidentes uma vez que para as pequenas deformações não há sentido na divisão desses sistemas, como no caso da descrição Lagrangeana Total. Dessa

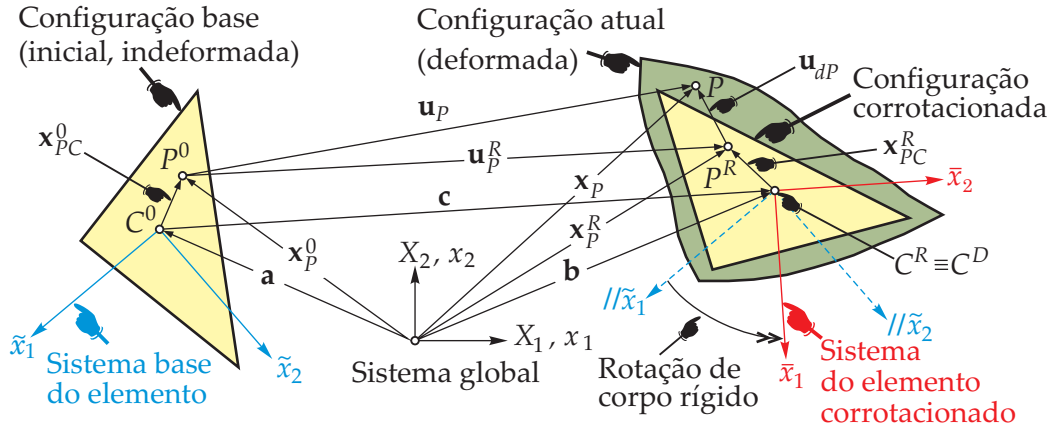


Figura 3.2: A cinemática bidimensional, para facilitar a visualização, de um elemento CR mostrando o movimento de um ponto genérico P .

forma, apenas um conjunto de eixos globais é apresentado nas Figs. 3.2 e 3.3, nessa última é mostrado como se efetua o mapeamento de um sistema em outro e vice-versa.

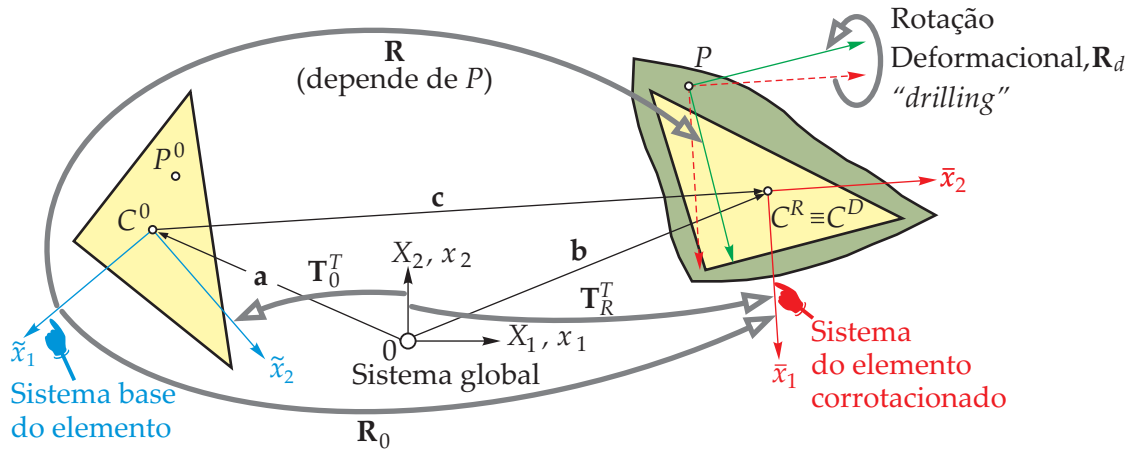


Figura 3.3: A cinemática bidimensional de um elemento CR enfatizando a transformação rotacional entre os sistemas coordenados.

O sistema global de coordenadas é o mesmo para todos os elementos. Por outro lado, cada elemento e é assinalado com dois sistemas locais cartesianos, um fixo e outro móvel:

- $\{\tilde{x}_i\} \rightarrow$ o sistema base do elemento, que está em azul nas Figs. 3.2 e 3.3, é orientado por três vetores unitários \mathbf{i}_i^0 que são formados pelas linhas da matriz de rotação ortogonal 3×3 , \mathbf{T}_0 ou as colunas de \mathbf{T}_0^T .
- $\{\bar{x}_i\} \rightarrow$ o sistema do elemento corrotacionado (em vermelho nas Figs. 3.2 e 3.3) é orientado por três vetores unitários \mathbf{i}_i^R que são formados pelas linhas da matriz de rotação ortogonal 3×3 , \mathbf{T}_R ou as colunas de \mathbf{T}_R^T .

Observação 3.2. *Note-se que o índice “e” foi suprimido para melhorar a organização da notação. Essa convenção será adotada de agora em diante, ao menos que a identificação do elemento seja importante. Nesse caso, será colocado como superíndice $(\cdot)^e$.*

É importante destacar que a origem dos sistemas coordenados, $\{\tilde{x}_i\}$ e $\{\bar{x}_i\}$, é posicionada sempre no centroide do elemento, de tal maneira que o ponto C na configuração deformada e corrotacionada coincidem, ou seja, $C^D \equiv C^R$. Quando o sistema global é colocado no sistema base do elemento no início da análise, os sistemas corrotacionado e base também coincidem: $\{\tilde{x}_i\} \equiv \{\bar{x}_i\}$. Nesse ponto, existem apenas dois sistemas coordenados que se ajustam com a análise linear via MEF, global e local.

Como convenção da notação, o uso de $G, 0, R$ e D tanto como super ou subíndice indicam as configurações global, base, corrotacionada e deformada, respectivamente. Os símbolos com til ou barra são medidos em relação ao sistema base $\{\tilde{x}_i\}$ e corrotacionado $\{\bar{x}_i\}$, respectivamente. Por exemplo, o vetor \mathbf{x}^R denota as coordenadas globais de um ponto na configuração \mathcal{C}^R e $\tilde{\mathbf{x}}^G$ refere-se a coordenada base de um ponto em \mathcal{C}^G . Os vetores a , b e c representam as translações do centroide do elemento. Esses vetores podem ser melhor visualizados na Fig. 3.4(b).

A Fig. 3.3 também mostra como é feito o mapeamento geométrico de um sistema para outro, como já foi mencionado. Assim, dado um deslocamento \mathbf{u} , essa transformação pode ser expressa matematicamente como:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}_0 \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{T}_R \mathbf{u} \quad (3.2.1)$$

em que \mathbf{T}_0 é a matriz de transformação linear das coordenadas do elemento base para as coordenadas globais e \mathbf{T}_R representa a matriz de transformação linear das coordenadas corrotacionadas para o sistema global.

3.2.2 Transformações de Sistemas Coordenados

Embora as Figs. 3.2 e 3.3 estejam restritas ao espaço bidimensional, ainda há um número elevado de elementos nas figuras que as deixam confusas. Para que a natureza fundamental da formulação CR seja melhor compreendida, a Fig. 3.4 apresenta o movimento de um elemento de barra no plano. A configuração global \mathcal{C}^G , que é fictícia, é explicitamente mostrada.

Considera-se um ponto genérico \mathbf{x}^G na configuração \mathcal{C}^G . Esse ponto é mapeado para as coordenadas globais \mathbf{x}^0 e \mathbf{x}^R nas configurações base e corrotacionada \mathcal{C}^0 e \mathcal{C}^R , respectivamente, através de:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{T}_0^T \mathbf{x}^G + \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^R = \mathbf{T}_R^T \mathbf{x}^G + \mathbf{b} \quad (3.2.2)$$

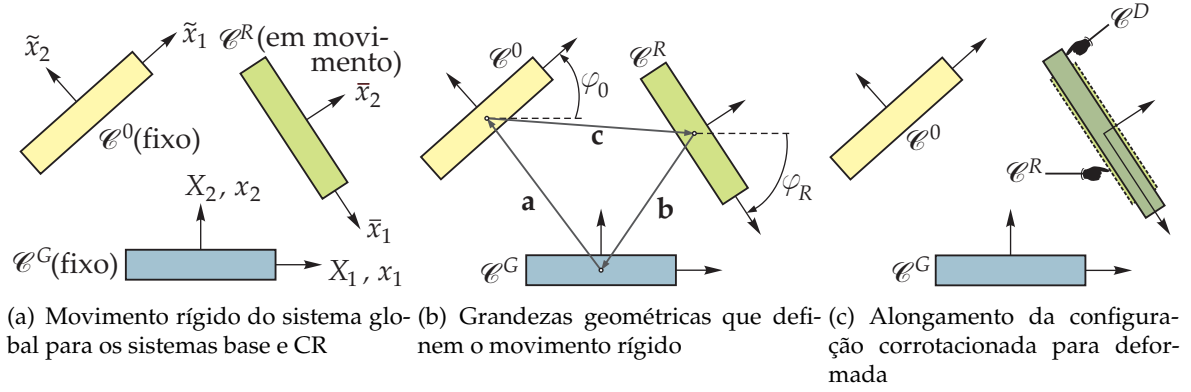


Figura 3.4: A essência da descrição cinemática corrotacional através do movimento 2D de uma barra.

Não obstante as matrizes de transformação linear já terem sido introduzidas na seção anterior, para facilitar o entendimento do movimento bidimensional ilustrado na Fig. 3.4(b), essas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \cos \varphi_R & \sin \varphi_R & 0 \\ -\sin \varphi_R & \cos \varphi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Quando a Eq. (3.2.2) é transformada para os sistemas base e corrotacionado, a posição do vetor \mathbf{x}^G deve repetir: $\tilde{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{x}^G$ e $\bar{\mathbf{x}}^R = \mathbf{x}^G$, devido à rigidez do movimento descrito pela Fig. 3.4(a). Essa condição requer:

$$\tilde{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}^R = \mathbf{T}_R(\mathbf{x}^R - \mathbf{b}) \quad (3.2.4)$$

Isto pode ser verificado inserindo \mathbf{x}^0 e \mathbf{x}^R da expressão (3.2.2) e observando que \mathbf{x}^G se repete.

3.2.3 Deslocamentos de Corpo Rígido

O deslocamento rígido é um vetor que une pontos correspondentes de uma configuração para outra, isto é, de \mathcal{E}^0 para \mathcal{E}^R . Esse vetor pode estar referido aos sistemas global, base ou corrotacionado. Por conveniência, chama-se de *matriz de rotação* o mapeamento de $\mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^R$ e sua expressão é dada por:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0 \quad (3.2.5)$$

Analogamente à Eq. (3.2.1) e tendo em vista a Fig. 3.4(b), introduz-se:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{c} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_R^T \mathbf{c} \quad (3.2.6)$$

Outras expressões são também bastante úteis, pois fazem a relação entre o nó de um elemento entre as diferentes configurações por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= \mathbf{x}^R - \mathbf{x}^0 \xrightarrow{(3.2.2) \text{ e } (3.2.6)} \mathbf{u}_r = (\mathbf{T}_R^T - \mathbf{T}_0^T) \mathbf{x}^G + \mathbf{c} \xrightarrow{(3.2.5)} \mathbf{u}_r = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{T}_0^T \mathbf{x}^G + \mathbf{c} \\ \mathbf{u}_r &= (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{T}_0^T \tilde{\mathbf{x}}^0 + \mathbf{c} = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{T}_0^T \tilde{\mathbf{x}}^R + \mathbf{c} = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) (\tilde{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{a}) + \mathbf{c} \\ \mathbf{u}_r &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^T) (\mathbf{x}^R - \mathbf{b}) + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (3.2.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_r = \mathbf{T}_0 \mathbf{u}_r = \mathbf{T}_0 (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) \mathbf{T}_0^T \tilde{\mathbf{x}}^0 + \tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}^0 + \tilde{\mathbf{c}} \quad (3.2.7b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_r = \mathbf{T}_R \mathbf{u}_r = \mathbf{T}_R (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^T) \mathbf{T}_R^T \tilde{\mathbf{x}}^R + \bar{\mathbf{c}} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_0^T) \tilde{\mathbf{x}}^R + \bar{\mathbf{c}} \quad (3.2.7c)$$

onde \mathbf{I} simboliza a matriz identidade de terceira ordem, ou seja, 3×3 , ao passo que

$$\tilde{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{T}_R \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_R^T \quad (3.2.8)$$

indicam as rotações de $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^R$ referidas ao sistema base e corrotacionado, respectivamente.

3.2.4 Matrizes de Rotação

A seguir, a Fig. 3.5 ilustra como uma rotação pode ser obtida a partir das outras duas rotações de forma que se possa mapear um ponto qualquer de um sistema em outro.

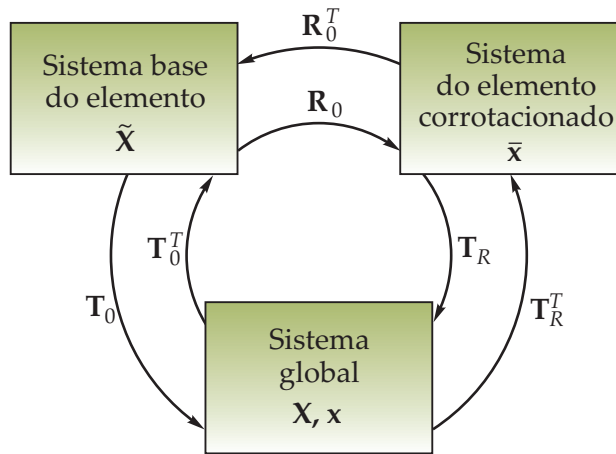


Figura 3.5: Mapeamento de um sistema coordenado para outro.

Matematicamente, isso pode ser expresso como:

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_R \mathbf{R}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_0 \mathbf{R}_0^T \quad (3.2.9a)$$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_0^T = \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_R \quad (3.2.9b)$$

Analogamente, no sistema corrotacionado tem-se:

$$\bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_R^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}}_0^T = \mathbf{T}_R \mathbf{T}_0^T \quad (3.2.10)$$

Percebe-se que \mathbf{T}_0 é fixo, desde que \mathcal{C}^G e \mathcal{C}^0 também sejam fixos durante toda a análise, considerando que \mathbf{T}_R e \mathbf{R}_0 variem. As variações dessas rotações estão submetidas as seguintes restrições:

$$\delta \mathbf{T}_0 = \delta \mathbf{T}_0^T = \mathbf{0}, \quad \delta \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{R}_0^T, \quad \delta \mathbf{T}_R^T = \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0^T, \quad \delta \mathbf{R}_0 = \delta \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0, \quad (3.2.11a)$$

$$\delta \mathbf{R}_0^T = \mathbf{T}_0^T \delta \mathbf{T}_R, \quad \mathbf{T}_R^T \delta \mathbf{T}_R + \delta \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_R = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_0^T \delta \mathbf{R}_0 + \delta \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 = \mathbf{0} \quad (3.2.11b)$$

As duas últimas partes da Eq. (3.2.11b) decorrem a condição de ortogonalidade, isto é,

$$\mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_R = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 = \mathbf{I} \quad (3.2.12)$$

Neste ponto, introduzem-se ω e $\bar{\omega}$ como sendo os vetores axiais de \mathbf{R}_0 e $\bar{\mathbf{R}}_0$, respectivamente, e se utiliza o mapeamento exponencial da matriz de rotação descrito no Apêndice A. As variações $\delta\omega$ e $\delta\bar{\omega}$ são empregadas para formar as matrizes antissimétricas:

$$\text{Rot}(\delta\omega) = \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T = -\text{Rot}(\delta\omega)^T \quad \text{e} \quad \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) = \delta \bar{\mathbf{R}}_0 \bar{\mathbf{R}}_0^T = -\text{Rot}(\delta\bar{\omega})^T \quad (3.2.13)$$

em que $\text{Rot}(\cdot)$ descreve um operador matemático que representa a rotação dos termos nele contido. Essas matrizes são vinculadas às seguintes transformações:

$$\text{Rot}(\delta\omega) = \mathbf{T}_0^T \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \mathbf{T}_0 \quad \text{e} \quad \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) = \mathbf{T}_0 \text{Rot}(\delta\omega) \mathbf{T}_0^T \quad (3.2.14)$$

Utilizando essas equações, pode-se sumarizar as seguintes relações entre rotações de matrizes segundo Felippa e Haugen [29]:

$$\delta \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{R}_0^T = -\mathbf{T}_R \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T = -\mathbf{T}_R \text{Rot}(\delta\omega) = -\mathbf{R}_0^T \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \mathbf{T}_0 \quad (3.2.15a)$$

$$\delta \mathbf{T}_R^T = \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0^T = -\mathbf{R}_0 \delta \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}_R^T = \text{Rot}(\delta\omega) \mathbf{T}_R^T = \mathbf{T}_0^T \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \mathbf{R}_0 \quad (3.2.15b)$$

$$\delta \mathbf{R}_0 = \delta \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0 = -\mathbf{R}_0 \delta \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 = \text{Rot}(\delta\omega) \mathbf{R}_0 = \mathbf{T}_0^T \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \bar{\mathbf{R}}_0 \mathbf{T}_0 \quad (3.2.15c)$$

$$\delta \mathbf{R}_0^T = \mathbf{T}_0^T \delta \mathbf{T}_R = -\mathbf{R}_0^T \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T = -\mathbf{R}_0^T \text{Rot}(\delta\omega) = -\mathbf{T}_0^T \bar{\mathbf{R}}_0^T \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \mathbf{T}_0 \quad (3.2.15d)$$

$$\delta \bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0^T = -\mathbf{T}_0 \mathbf{R}_0 \delta \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}_R^T = \mathbf{T}_0 \text{Rot}(\delta\omega) \mathbf{T}_R^T = \text{Rot}(\delta\bar{\omega}) \bar{\mathbf{R}}_0 \quad (3.2.15e)$$

$$\delta \bar{\mathbf{R}}_0^T = \mathbf{T}_0 \delta \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}_0^T = -\mathbf{T}_R \delta \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_0^T \mathbf{T}_0^T = -\mathbf{T}_R \text{Rot}(\delta \boldsymbol{\omega}) \mathbf{T}_0^T = -\bar{\mathbf{R}}_0^T \text{Rot}(\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}) \quad (3.2.15f)$$

3.2.5 Os Graus de Liberdade

Por conveniência, assume-se que o número de graus de liberdade por nó de um elemento seja de seis, sendo, três referentes à translação e outros três relativos à rotação. Essa suposição engloba o elemento de casca proposto neste trabalho. A geometria do elemento é definida pelas coordenadas \mathbf{x}_a^0 , com $a = 1, \dots, N^e$ na configuração inicial (base) do elemento, em que a representa o índice do elemento e N^e simboliza o número de nós do elemento.

A notação usada para os graus de liberdade em níveis estruturais e do elemento está disposta na Tab. 3.1. Se o número total de nós da estrutura for representado por N , o conjunto $\{\mathbf{u}_a, \mathbf{R}_a\}$ para $a = 1, \dots, N$ define o vetor de deslocamento nodal \mathbf{d} . Percebe-se, entretanto, que no senso comum \mathbf{d} não se comporta como um vetor devido ao caráter da rotação finita espacial estar sendo levada em consideração e como consequência da não comutatividade das rotações no espaço tridimensional (ver Apêndice A). Com isso, o termo *pseudovetor* que contém os deslocamentos da estrutura é mais apropriado.

Tabela 3.1: Notação dos graus de liberdade do elemento.

Notação	Sistema	Nível	Descrição
$\hat{\mathbf{d}} = [\hat{\mathbf{d}}_1 \cdots \hat{\mathbf{d}}_N]^T$ com $\hat{\mathbf{d}}_a = [\mathbf{u}_a \mathbf{R}_a]^T$	Global	Estrutura	Deslocamentos e rotações totais nos nós da estrutura. Translações: \mathbf{u}_a , rotações: \mathbf{R}_a .
$\delta \mathbf{d} = [\delta \mathbf{d}_1 \cdots \delta \mathbf{d}_N]^T$ com $\delta \mathbf{d}_a = [\delta \mathbf{u}_a \delta \boldsymbol{\omega}_a]^T$	Global	Estrutura	Incremento dos deslocamentos e giros nos nós da estrutura usado no processo de solução iterativa. Translações: $\delta \mathbf{u}_a$, rotações: $\delta \boldsymbol{\omega}_a$.
$\delta \bar{\mathbf{d}}^e = [\delta \bar{\mathbf{d}}_1^e \cdots \delta \bar{\mathbf{d}}_{N^e}^e]^T$ com $\delta \bar{\mathbf{d}}_a^e = [\delta \bar{\mathbf{u}}_a^e \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e]^T$	CR local	Elemento	Localização do elemento e no sistema CR. Translações: $\delta \bar{\mathbf{u}}_a^e$, rotações: $\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e$.
$\bar{\mathbf{d}}_d^e = [\bar{\mathbf{d}}_{d1}^e \cdots \bar{\mathbf{d}}_{dN^e}^e]^T$ com $\bar{\mathbf{d}}_{da}^e = [\bar{\mathbf{u}}_{da}^e \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e]^T$	CR local	Elemento	Deslocamentos e rotações deformacionais nos nós do elemento. Translações: $\bar{\mathbf{u}}_{da}^e$, rotações: $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e$.

$N \rightarrow$ número de nós na estrutura; $N^e \rightarrow$ número de nós no elemento e ; $a \rightarrow$ índice nodal.

O deslocamento nodal total no elemento, \mathbf{d}^e , é adquirido de \mathbf{d} . Dado \mathbf{d}^e , a chave da formulação corrotacional está na operação de obtenção das componentes deformacionais a partir das translações e rotações de cada nó desse vetor. Inicialmente, a partir das coordenadas globais iniciais de cada nó do elemento, \mathbf{x}_a^e , computa-se a posição do centroide do elemento por:

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{x}_{C^0}^e = \frac{1}{N^e} \sum_{a=1}^{N^e} \mathbf{x}_a^e \quad (3.2.16)$$

Em função da matriz de transformação linear definida em (3.2.1), calculam-se as

coordenadas nodais no sistema base do elemento por:

$$\tilde{\mathbf{x}}_a^e = \mathbf{T}_0^e (\mathbf{x}_a^e - \mathbf{a}^e) \quad (3.2.17)$$

A seguir, são armazenadas as coordenadas nodais na configuração deformada, ou seja, atual do elemento a partir de:

$$\mathbf{x}_a^e = \mathbf{x}_a^e + \mathbf{u}_a^e \quad (3.2.18)$$

e do vetor posição do centroide na configuração atualizada,

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{x}_C^e = \frac{1}{N^e} \sum_{a=1}^{N^e} \mathbf{x}_a^e \quad (3.2.19)$$

Assim, estabelece-se o procedimento para o ajuste do sistema corrotacionado local deformado utilizando, analogamente a Eq. (3.2.9b), através de:

$$\mathbf{R}_0^e = \mathbf{T}^e (\mathbf{T}^e)^T \quad (3.2.20)$$

Em decorrência desse giro no sistema, são obtidas as coordenadas locais dos nós na configuração CR:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{Ra}^e = \mathbf{T}^e (\mathbf{x}_a^e - \mathbf{b}^e) \quad (3.2.21)$$

Com o intuito de obter os esforços internos do elemento, é necessário estabelecer o vetor dos deslocamentos deformacionais $\bar{\mathbf{d}}_d^e$ (introduzido na Tab. 3.1) no sistema de eixos local, o qual armazena os graus de liberdade de translação e rotação para cada nó do elemento:

$$\bar{\mathbf{d}}_d^e = [\bar{\mathbf{d}}_{d1}^e \cdots \bar{\mathbf{d}}_{dN^e}^e]^T, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{d}}_{da}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{da}^e \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}_{da}^e$ representa a translação deformacional, cuja expressão é dada por:

$$\bar{\mathbf{u}}_{da}^e = \tilde{\mathbf{x}}_a^e + \tilde{\mathbf{x}}_{Ra}^e \quad (3.2.23)$$

Como o procedimento para se obter o vetor de rotação deformacional $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e$ é um pouco mais complexo, tal metodologia é apresentada no Capítulo 4, especificamente para o elemento triangular de casca, e no Apêndice A para um elemento qualquer. Em decorrência da Eq. (3.2.8), são computadas as rotações deformacionais nos sistemas base e corrotacio-

nado, respectivamente, por:

$$\tilde{\mathbf{R}}_d = \mathbf{T} \mathbf{R}_a \mathbf{T}_0^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}}_{da}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{R}_a^e (\mathbf{T}_0^e)^T \quad (3.2.24)$$

A ausência de subíndice no tensor \mathbf{T} indica que a matriz está referenciada à configuração atual ou deformada. Os ângulos de $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e$ são extraídos a partir do vetor axial da matriz de rotação $\bar{\mathbf{R}}_{da}^e$.

Todo esse procedimento apresentado para obter o pseudovetor dos deslocamentos deformacionais de cada nó da estrutura está sumarizado na Tab. 3.2.

Tabela 3.2: Sequência necessária para se obter o vetor de deslocamentos deformacionais.

Passo	Operação para cada elemento e e nó a
1:	Inicializa-se \mathbf{x}^e , calcula-se a posição do centroide: $\mathbf{a}^e = \mathbf{x}_{C^0}^e = \frac{1}{N^e} \sum_{a=1}^{N^e} \mathbf{x}_a^e$. A partir de \mathbf{T}_0^e , computa-se $\tilde{\mathbf{x}}_a^e = \mathbf{T}_0^e (\mathbf{x}_a^e - \mathbf{a}^e)$.
2:	Avalia-se a configuração deformada: $\mathbf{x}_a^e = \mathbf{x}_a^e + \mathbf{u}_a^e$ no centroide $\mathbf{b}^e = \mathbf{x}_C^e = \frac{1}{N^e} \sum_{a=1}^{N^e} \mathbf{x}_a^e$, ajusta-se $\mathbf{R}_0^e = \mathbf{T}^e (\mathbf{T}^e)^T$ e se determina $\tilde{\mathbf{x}}_{Ra}^e = \mathbf{T}^e (\mathbf{x}_a^e - \mathbf{b}^e)$.
3:	Calcula-se $\bar{\mathbf{u}}_{da}^e = \tilde{\mathbf{x}}_a^e + \tilde{\mathbf{x}}_{Ra}^e$ e $\bar{\mathbf{R}}_{da}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{R}_a^e (\mathbf{T}_0^e)^T$ e se obtém $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e \leftarrow \bar{\mathbf{R}}_{da}^e$.

Em decorrência da metodologia apresentada, percebe-se que o cálculo do centroide é feito a partir da simples média das coordenadas nodais do elemento. Para o triângulo de três nós, esse procedimento é apropriado. Entretanto, para quadriláteros de quatro nós a média das coordenadas nodais, em geral, não coincide com o centroide. Tal assunto não foi abordado nesta tese, pois não faz parte do escopo do trabalho.

3.2.6 Matrizes do Elemento Independente Corrotacionado

Para a análise do Elemento Independente Corrotacional (EICR), é conveniente incorporar outras matrizes que irão auxiliar no estudo da formulação CR: $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_u + \bar{\mathbf{P}}_\omega$, $\bar{\mathbf{S}}$, \mathbf{G} , \mathbf{H} e \mathbf{L} que serão apresentadas mais adiante. O elemento tratado aqui possui N^e nós e seis graus de liberdade por nó, como já foi mencionado anteriormente. A notação empregada é a mesma que foi revelada na Tab. 3.1. É importante destacar que todas as matrizes EICR são construídas nó a nó.

A seguir, a Fig. 3.6 ilustra o conceito da configuração não equilibrada, ou perturbada, $\mathcal{C}^D + \delta\mathcal{C}$. As configurações CR e deformada são consideradas “estáticas”, sendo que esta última varia na acepção do cálculo variacional.

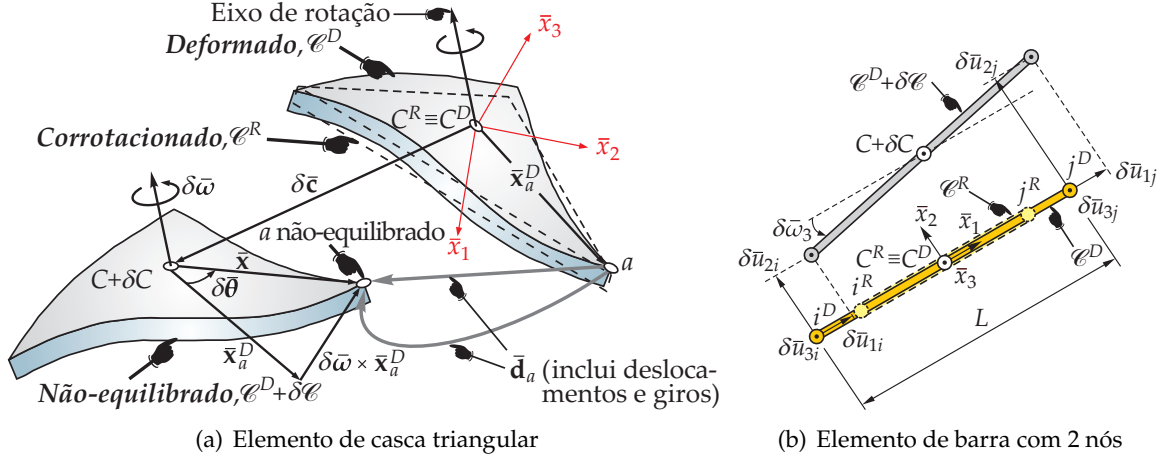


Figura 3.6: Conceito da configuração não equilibrada para ilustrar a derivação das matrizes EICR de elementos se movendo no espaço 3D.

A matriz de projeção de translação $\bar{\mathbf{P}}_u$ ou simplesmente *projetor-T* é dimensionada por $6N^e \times 6N^e$. Sua construção é obtida a partir de submatrizes quadradas de terceira ordem:

$$\mathbf{U}_{ab} = \left(\delta_{ab} - \frac{1}{N^e} \right) \mathbf{I} \quad (3.2.25)$$

em que os subíndices a e b representam os índices nodais que variam de 1 a N^e , \mathbf{I} simboliza a matriz identidade 3×3 e δ_{ab} é o delta de Kronecker. Agrupando os blocos para todos os N^e nós e completando com blocos de submatrizes nulas e identidade 3×3 , obtém-se para o elemento de barra contendo dois nós e para o elemento de casca triangular de três nós, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\bar{\mathbf{P}}_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{P}}_u = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{2}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \frac{2}{3}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (3.2.26)$$

Para todo $N^e \geq 1$, verifica-se que $\bar{\mathbf{P}}_u^2 = \bar{\mathbf{P}}_u$. Com isso, $\bar{\mathbf{P}}_u$ é ortogonal. Fisicamente, essa matriz extrai a parte deformacional do deslocamento de corpo rígido total.

A Eq. (3.2.27) fornece a matriz $\bar{\mathbf{S}}$, que é chamada de *matriz braço de alavanca* e tem dimensão $3N^e \times 3$, conforme segue:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_a^T & \mathbf{I} & \cdots \end{bmatrix}^T \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, N^e \quad (3.2.27)$$

onde \mathbf{I} denota a matriz identidade 3×3 e $\bar{\mathbf{S}}_a$ representa as submatrizes 3×3 braço de alavanca. Seja $\mathbf{x}_a = [x_{1a} \ x_{2a} \ x_{3a}]^T$, genericamente, o vetor que contém as coordenadas do nó a referenciado ao centroide do elemento. Então,

$$\bar{\mathbf{S}}_a = \text{Rot}(\mathbf{x}_a) \quad (3.2.28)$$

Vale ressaltar que essas coordenadas podem ser relacionadas com as três configurações \mathcal{C}^0 , \mathcal{C}^R e \mathcal{C}^D , todas referidas aos dois sistemas: global e local. De acordo com as diferentes configurações, as Eqs. (3.2.27) e (3.2.28) podem assumir diferentes formas:

$$\bar{\mathbf{S}}_a^0 = \begin{bmatrix} 0 & -x_{3a}^0 - a_3 & x_{2a}^0 - a_2 \\ x_{3a}^0 - a_3 & 0 & -x_{1a}^0 - a_1 \\ -x_{2a}^0 - a_2 & x_{1a}^0 - a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.29a)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_a^R = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{x}_{3a}^R & \bar{x}_{2a}^R \\ \bar{x}_{3a}^R & 0 & -\bar{x}_{1a}^R \\ -\bar{x}_{2a}^R & \bar{x}_{1a}^R & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{S}}_a^D = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{x}_{3a}^D & \bar{x}_{2a}^D \\ \bar{x}_{3a}^D & 0 & -\bar{x}_{1a}^D \\ -\bar{x}_{2a}^D & \bar{x}_{1a}^D & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.29b)$$

A Eq. (3.2.29a) se refere ao sistema base do elemento, enquanto que as expressões dadas por (3.2.29b) estão relacionadas com os sistemas local corrotacionado e local deformado, respectivamente. Nesses casos, a Eq. (3.2.27) herdou a notação $\bar{\mathbf{S}}^0$, $\bar{\mathbf{S}}^R$ e $\bar{\mathbf{S}}^D$. Para uma elemento de barra com dois nós e comprimento L , conforme mostra a Fig. 3.6(b), a matriz do elemento deformado referenciado ao sistema local CR ficará:

$$\bar{\mathbf{S}}^D = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 12}^T \quad (3.2.30)$$

Como no modelo de barra o torque ao redor do eixo \bar{x}_1 é nulo, a primeira coluna da Eq. (3.2.30) também será nula.

Em 1994, Haugen [39] introduziu a chamada *matriz de correção do giro* \mathbf{G} , cuja dimensão é de $3 \times 6N^e$. Essa matriz relaciona a variação da rotação instantânea do elemento no centroide da configuração deformada em decorrência de variações nodais nos graus de liberdade, conforme mostra a Fig. 3.6(a), e pode ser descrita globalmente e localmente, respectivamente, como:

$$\delta \boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G} \delta \mathbf{d}^e = \sum_{a=1}^{N^e} \mathbf{G}_a \delta \mathbf{d}_a^e \quad \text{e} \quad \delta \bar{\boldsymbol{\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{G}} \delta \bar{\mathbf{d}}^e = \sum_{a=1}^{N^e} \bar{\mathbf{G}}_a \delta \bar{\mathbf{d}}_a^e \quad (3.2.31)$$

em que a variação do vetor axial $\delta \boldsymbol{\omega}$ revela a rotação instantânea no centroide do elemento,

medida no sistema global de coordenadas onde a configuração deformada é formada por $6N^e$ componentes de $\delta \mathbf{d}^e$. Quando esses vetores forem correlacionados com o sistema local CR, a simbologia se torna $\delta \bar{\omega}^e$ e $\delta \bar{\mathbf{d}}^e$, respectivamente. Tanto \mathbf{G} quanto $\bar{\mathbf{G}}$ podem ser construídas a partir de submatrizes \mathbf{G}_a e $\bar{\mathbf{G}}_a$ de ordem 3×6 apresentadas em (3.2.31). Por simplicidade, a expressão a seguir mostra a matriz de correção do giro na configuração \mathcal{C}^D referida ao sistema CR local para o elemento de barra descrito na Fig. 3.6(b):

$$\bar{\mathbf{G}}^D = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 12} \quad (3.2.32)$$

Comparando as Eqs. (3.2.30) e (3.2.32), nota-s que as matrizes $\bar{\mathbf{S}}^D$ e $\bar{\mathbf{G}}^D$ satisfazem a propriedade de biortogonalidade, isto é,

$$\mathbf{G} \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{D} \quad (3.2.33)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal composta por valores unitários ou nulos. A diagonal terá valor um se a componente de giro é indefinida pelo grau de liberdade do elemento, caso contrário, será zero. No caso da barra espacial, o produto obtido das expressões (3.2.30) e (3.2.32) é $\text{diag}(0, 1, 1)$. Para outros elementos, geralmente, $\mathbf{D} = \mathbf{I}$. Essa característica resulta do fato de que as três colunas de $\bar{\mathbf{S}}$ representam os vetores de deslocamento associados com as rotações de corpo rígido $\delta \bar{\omega}_i = 1$.

Agora, define-se a chamada *matriz de projeção rotacional* ou simplesmente *projetor-R* como:

$$\bar{\mathbf{P}}_\omega = \bar{\mathbf{S}} \mathbf{G} \quad (3.2.34)$$

Ao contrário do projetor-T introduzido na Eq. (3.2.26), o projetor-R depende da configuração e do sistema de referência. Isso é identificado conforme a simiografia apresentada: $\bar{\mathbf{P}}_\omega^R = \bar{\mathbf{S}}_\omega^R \bar{\mathbf{G}}_\omega^R$, por exemplo. Essa matriz $6N^e \times 6N^e$ é um projetor ortogonal de posto igual ao apresentado por (3.2.33). Caso $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, $\bar{\mathbf{P}}_\omega$ terá posto 3. Assim, a *matriz de projeção total*, composta pela soma das projeções de translação e rotação descritas pelas Eqs. (3.2.26) e (3.2.34) será dada por:

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_u + \bar{\mathbf{P}}_\omega \quad (3.2.35)$$

Por fim, mais duas matrizes $6N^e \times 6N^e$ serão introduzidas, pois fazem parte da formulação EICR e são indicadas por \mathbf{H} e \mathbf{L} . A primeira é uma matriz diagonal construída a

partir de:

$$\mathbf{H} = \text{diag} [\mathbf{I} \quad \mathbf{H}_a \quad \cdots] \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, N^e \quad (3.2.36)$$

em que \mathbf{H}_a simboliza a derivada do Jacobiano do vetor axial rotacional em relação ao pseudovetor de giro avaliada no nó a e é dada por:

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_a), \quad \text{com} \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \quad (3.2.37)$$

A Eq. (3.2.37) mostrou a forma explícita de $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ para um elemento qualquer, entretanto, no Apêndice A será apresentado o cálculo desse tensor para o elemento triangular de casca. A versão local no sistema corrotacionado fica:

$$\bar{\mathbf{H}} = \text{diag} [\mathbf{I} \quad \bar{\mathbf{H}}_{d1} \quad \mathbf{I} \quad \bar{\mathbf{H}}_{d2} \quad \cdots \quad \mathbf{I} \quad \bar{\mathbf{H}}_{dN^e}] \quad (3.2.38)$$

com,

$$\bar{\mathbf{H}}_{da} = \bar{\mathbf{H}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}) \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{H}}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_d) = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_d}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_d} \quad (3.2.39)$$

A matriz diagonal \mathbf{L} é obtida de forma análoga a apresentada pela Eq. (3.2.38), ou seja, em blocos; de tal maneira que:

$$\mathbf{L} = \text{diag} [\mathbf{0} \quad \mathbf{L}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_{N^e}] \quad \text{com} \quad \mathbf{L}_a = \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_a, \mathbf{m}_a) \quad (3.2.40)$$

onde \mathbf{m}_a representa o vetor de momentos (conjugados ao vetor $\delta \boldsymbol{\omega}_a$) no nó a . A expressão completa para $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$ é provida pelo Apêndice A. A representação na sua forma local, isto é, $\bar{\mathbf{L}}$ tem a mesma concepção aplicada à Eq. (3.2.39), ficando $\bar{\mathbf{L}}_a = \mathbf{L}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}, \bar{\mathbf{m}}_a)$.

3.2.7 As Translações Deformacionais

A fim de se compreender a translação deformacional, considera-se um ponto genérico P^0 do elemento base, conforme ilustrou a Fig. 3.2, com vetor de posição global \mathbf{x}_P^0 . O ponto P^0 se move rigidamente até P^R que está na configuração \mathcal{C}^R com vetor posição:

$$\mathbf{x}_P^R = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{u}_P^R = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{c} + \mathbf{x}_{PC}^R \quad (3.2.41)$$

Em seguida, o elemento se deforma e vai para a configuração \mathcal{C}^D , assim, o ponto P^R passa a ocupar P , com vetor de posição global:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{u}_P = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{c} + \mathbf{x}_{PC}^R + \mathbf{u}_{dP} \quad (3.2.42)$$

A distância entre os pontos C^0 e P^0 é dada por $\mathbf{x}_p^0 - \mathbf{a}$, que no sistema base fica:

$$\tilde{\mathbf{x}}_p^0 = \mathbf{T}_0 (\mathbf{x}_p^0 - \mathbf{a}) \quad (3.2.43)$$

De forma análoga, $\mathbf{x}_p^R - \mathbf{b}$ representa a distância entre os pontos C^R e P^R que, no sistema corrotacionado, se torna:

$$\bar{\mathbf{x}}_p^R = \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_{pC}^R - \mathbf{b}) \quad (3.2.44)$$

Uma vez que ocorra o movimento de corpo rígido de $\mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^R$, $\tilde{\mathbf{x}}_p^0 = \bar{\mathbf{x}}_p^R$. Com isso, a distância entre P^R e P é:

$$\mathbf{u}_{dP} = \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_P^R \quad (3.2.45)$$

O vetor \mathbf{u}_{dP} representa o deslocamento deformacional que no sistema corrotacionado pode ser expresso por:

$$\bar{\mathbf{u}}_{dP} = \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_P^R) \quad (3.2.46)$$

O deslocamento total é dado pela soma da parte deformacional com a parte rígida do movimento, ou seja, $\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_{rP} + \mathbf{u}_{dP}$. O deslocamento rígido é dado pelas expressões agrupadas em (3.2.7), em que a forma mais empregada é dada por $\mathbf{u}_{rP} = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{I}) (\mathbf{x}_p^0 - \mathbf{a}) + \mathbf{c}$.

Assim, a parte deformacional é obtida em decorrência de:

$$\mathbf{u}_{dP} = \mathbf{u}_P - \mathbf{u}_{rP} = \mathbf{u}_P - \mathbf{c} + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0) (\mathbf{x}_p^0 - \mathbf{a}) \quad (3.2.47)$$

Rearranjando os termos e retirando o índice P com o intuito de deixar a notação mais limpa, obtém-se:

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u} - \mathbf{c} + (\mathbf{I} - \mathbf{R}_0) (\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}) \quad (3.2.48)$$

A posição do centroide do elemento é calculada pela média das coordenadas dos nós, consequentemente,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N^e} \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{u}_b \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_a - \mathbf{c} = \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{U}_{ab} \mathbf{u}_b \quad (3.2.49)$$

onde \mathbf{U}_{ab} representa o bloco de construção para o projetor-T introduzido pela Eq. (3.2.25) na seção anterior. Avaliando a Eq. (3.2.48) no nó a , inserindo (3.2.49), tomando a variação utilizada em (3.2.15), empregando (3.2.2) para mapear $\mathbf{R}_0 (\mathbf{x}^0 - \mathbf{a}) = \mathbf{x}^R - \mathbf{b}$ e usando a

propriedade do produto cruzado entre vetores para extrair $\delta\omega$, chega-se à:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}_{da} &= \delta(\mathbf{u}_a - \mathbf{c}) - \delta\mathbf{R}_0 (\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{a}) = \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{U}_{ab} \delta\mathbf{u}_b - \text{Rot}(\delta\omega) \mathbf{R}_0 (\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{a}) \\ &= \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{U}_{ab} \delta\mathbf{u}_b - \text{Rot}(\delta\omega) (\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{b}) = \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{U}_{ab} \delta\mathbf{u}_b - \text{Rot}(\mathbf{x}_a^0 - \mathbf{a}) \delta\omega \\ &= \sum_{b=1}^{N^e} \left(\mathbf{U}_{ab} \delta\mathbf{u}_b + \bar{\mathbf{S}}_a^R \mathbf{G}_b \delta\mathbf{d}_b \right)\end{aligned}\quad (3.2.50)$$

As matrizes $\bar{\mathbf{S}}$ e \mathbf{G} já foram apresentadas em (3.2.27-3.2.31). O deslocamento deformacional do elemento no sistema CR é dado pela Eq. (3.2.1) colocando o sub-índice d , ou seja, $\bar{\mathbf{u}}_d = \mathbf{T}_R \mathbf{u}_d$. Como resultado da Eq. (3.2.7c), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{u}}_d = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{c}} - \left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_0^T \right) \bar{\mathbf{x}}^R \quad (3.2.51)$$

no qual $\bar{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{T}_R \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_R^T$. Procedendo de forma análoga à descrita por (3.2.50), produz-se:

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_{da} = \sum_{b=1}^{N^e} \left(\mathbf{U}_{ab} \delta\bar{\mathbf{u}}_b + \bar{\mathbf{S}}_a^D \bar{\mathbf{G}}_b \delta\bar{\mathbf{d}}_b \right) \quad (3.2.52)$$

A matriz $\bar{\mathbf{S}}_a^R$ da Eq. (3.2.50) muda para $\bar{\mathbf{S}}_a^D$ em (3.2.52), que utiliza as coordenadas nodais da configuração deformada.

3.2.8 As Rotações Deformacionais

A rotação nodal de um elemento pode ser representada por uma rotação tensorial \mathbf{R} , a partir da configuração inicial \mathcal{C}^0 até a configuração final \mathcal{C}^D , conforme mostra a Fig. 3.3. Assumindo-se que o tensor \mathbf{R} é decomposto em rotação de corpo rígido \mathbf{R}_0 e rotação deformacional \mathbf{R}_{dP} tem-se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{dP} \mathbf{R}_0 \quad (3.2.53)$$

em que $\mathbf{R}_{dP} \mathbf{R}_0$ indica que a rotação rígida é seguida pela deformação. Isso ocorre como consequência de que $\mathbf{R}_{dP} \mathbf{R}_0 \neq \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_{dP}$ e é consistente com o procedimento apresentado por Rankin e seus colaboradores [81, 82]. Dessa forma,

$$\mathbf{R}_{dP} = \mathbf{R}_P \mathbf{R}_0^T \quad (3.2.54)$$

que pode ser mapeado no sistema corrotacionado local como:

$$\bar{\mathbf{R}}_d = \mathbf{T}_R \mathbf{R}_d \mathbf{T}_R^T, \quad \text{com} \quad \mathbf{R}_d = \mathbf{R} \mathbf{R}_0^T = \mathbf{R} \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_R \quad (3.2.55)$$

Assume-se que a rotação deformacional predita pela Eq. (3.2.55) seja pequena, para que a **Condição 1** descrita no capítulo anterior não seja violada. Com isso, o procedimento para extrair o vetor axial de rotação θ_d de uma dada matriz é necessário. Formalmente, expressa-se $\bar{\theta}_d = \text{Axial}[\log(\bar{\mathbf{R}}_d)]$, entretanto isso pode causar instabilidade numérica segundo Felippa [29]. Uma metodologia robusta e eficiente para que isso seja evitado é apresentado no Apêndice A. O vetor axial é avaliado em cada nó e identificado com o grau de liberdade rotacional. Assim, avaliando (3.2.55) no a -ésimo nó do elemento, pegando as variações e utilizando um procedimento similar ao apresentado até o presente momento do trabalho, chega-se à:

$$\delta\theta_{da} = \frac{\partial\theta_{da}}{\partial\omega_{da}} \sum_{b=1}^{N^e} \frac{\partial\omega_{da}}{\partial\omega_b} \delta\omega_b = \mathbf{H}_a \sum_{b=1}^{N^e} (\delta_{ab} [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}] - \mathbf{G}_b) \delta\mathbf{d}_b \quad (3.2.56a)$$

$$\delta\bar{\theta}_{da} = \frac{\partial\bar{\theta}_{da}}{\partial\bar{\omega}_{da}} \sum_{b=1}^{N^e} \frac{\partial\bar{\omega}_{da}}{\partial\bar{\omega}_b} \delta\bar{\omega}_b = \bar{\mathbf{H}}_a \sum_{b=1}^{N^e} (\delta_{ab} [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}] - \bar{\mathbf{G}}_b) \delta\bar{\mathbf{d}}_b \quad (3.2.56b)$$

onde \mathbf{G}_b e \mathbf{H}_a foram definidas pelas Eqs. (3.2.31) e (3.2.37), respectivamente.

3.3 O Vetor de Forças Internas

Nesta seção, será desenvolvido o vetor das forças internas $\bar{\mathbf{p}}^e$, seguindo a formulação corrotacional EICR proposta por Haugen [39], apenas com algumas alterações de notação. Conforme Haugen mostrou, esta formulação permite uma boa performance para o elemento, quando se trata do autoequilíbrio do vetor das forças internas e da consistência e simetrização da matriz de rigidez tangente, e também quando se trata da invariância e independência do elemento.

A restrição básica da formulação corrotacional é:

Condição 2. *Os deslocamentos e rotações podem ser arbitrariamente grandes, desde que as deformações sejam pequenas.*

Nota-se que essa é uma forma diferenciada para se representar a mesma restrição mencionada na **Condição 1**. Com isso, a descrição cinemática CR assume um comportamento linear elástico para os materiais tratados e sua energia de deformação interna é função do deslocamento deformacional, isto é, $U^e = U^e(\bar{\mathbf{d}}_d^e)$ com $\bar{\mathbf{d}}_d^e$ organizado como foi descrito na Tab. 3.1. O vetor de forças internas no sistema corrotacionado pode ser obtido através da

primeira derivada da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais:

$$\bar{\mathbf{p}}^e = \frac{\partial U^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_d^e} \quad (3.3.1)$$

Para cada nó $a = 1, \dots, N^e$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{p}}_a^e = \frac{\partial U^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{da}^e} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{ua}^e \\ \bar{\mathbf{p}}_{\theta a}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_{da}^e} \\ \frac{\partial U^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e} \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

A segunda parte da Eq. (3.3.2) separa forças rotacionais e de translação. Para referir essas expressões ao sistema global, é preciso relacionar variações cinemáticas locais com as globais, de forma que:

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_{da}^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}^e \end{bmatrix} = \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{J}_{ab} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_a^e \\ \delta \boldsymbol{\omega}_a^e \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{J}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{db}^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{db}^e}{\partial \boldsymbol{\omega}_a^e} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{db}^e}{\partial \mathbf{u}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{db}^e}{\partial \boldsymbol{\omega}_a^e} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Da invariância dos trabalhos virtuais (PTV), tem-se:

$$(\bar{\mathbf{p}}_u^e)^T \delta \bar{\mathbf{u}}_d^e + (\bar{\mathbf{p}}_\theta^e)^T \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_d^e = (\mathbf{p}_u^e)^T \delta \mathbf{u}_d^e + (\mathbf{p}_\theta^e)^T \delta \boldsymbol{\omega}^e \quad (3.3.4)$$

Com isso,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{ua}^e \\ \mathbf{p}_{\theta a}^e \end{bmatrix} = \sum_{b=1}^{N^e} \mathbf{J}_{ab}^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{ua}^e \\ \bar{\mathbf{p}}_{\theta a}^e \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad a = 1, \dots, N^e \quad (3.3.5)$$

É conveniente separar o Jacobiano apresentado na Eq. (3.3.3) da seguinte forma:

$$\mathbf{J}_{ab} = \bar{\mathbf{H}}_b \bar{\mathbf{P}}_{ab} \bar{\mathbf{T}}_a \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_{ab}^T = \bar{\mathbf{T}}_a^T \bar{\mathbf{P}}_{ab}^T \bar{\mathbf{H}}_b^T \quad (3.3.6)$$

Essas matrizes são provenientes de três estágios de transformação esquematizados na Fig. 3.7 conforme as seguintes expressões:

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_{db}^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_{db}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{H}}_{db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_b^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{H}}_{db} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_{db}^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e} \end{bmatrix} \quad (3.3.7a)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_b^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_b^e \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}_{ab} \begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_a^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{P}}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{db}^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^e} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_{db}^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_{db}^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_{db}^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e} \end{bmatrix} \quad (3.3.7b)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_a^e \\ \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_a^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_a^e \\ \delta \boldsymbol{\omega}_a^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_a^e \\ \delta \boldsymbol{\omega}_a^e \end{bmatrix} \quad (3.3.7c)$$

em que $\bar{\mathbf{H}}$ foi introduzido pela Eq. (3.2.38). A matriz 6×6 , $\bar{\mathbf{P}}_{ab}$, apresentada em (3.3.7b), extrai a parte deformacional do deslocamento no nó b em termos do deslocamento total no nó a , ambos referidos ao sistema corrotacionado.

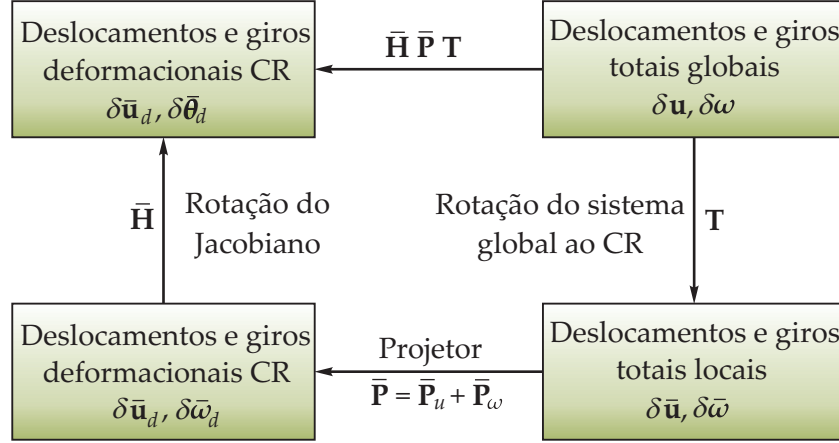


Figura 3.7: Etapas da sequência de transformação dos graus de liberdade deformados para globais.

Para expressar compactamente as transformações realizadas em (3.3.7) para todo o elemento, é necessário fazer o agrupamento das matrizes $6N^e \times 6N^e$ como segue:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{1N^e} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{2N^e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{P}}_{N^e1} & \bar{\mathbf{P}}_{N^e2} & \cdots & \bar{\mathbf{P}}_{N^eN^e} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Então, as transformações do elemento podem ser escritas como:

$$\delta \mathbf{d}_d^e = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T} \delta \mathbf{d}^e \quad \text{e} \quad \mathbf{p}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e \quad (3.3.9)$$

Em nível de elemento, $\delta \bar{\mathbf{d}}_d^e = \bar{\mathbf{P}} \delta \mathbf{d}^e$ extrai a parte deformacional “projetando” os modos de corpo rígido. Por essa razão, $\bar{\mathbf{P}}$ é chamado de projetor ou tensor de projeção.

3.4 A Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente do elemento, \mathbf{K}^e , é considerada consistente se for originada da derivação do vetor das forças internas \mathbf{p}^e , em relação ao vetor dos deslocamentos \mathbf{d}^e , de tal maneira que:

$$\delta \mathbf{p}^e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{p}^e}{\partial \mathbf{d}^e} \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{K}^e \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.1)$$

Considerando a variação de \mathbf{p}^e apresentado na Eq. (3.3.9), originam-se quatro termos:

$$\delta \mathbf{p}^e = \overbrace{\delta \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e}^{1^\circ \text{ termo}} + \overbrace{\mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e}^{2^\circ \text{ termo}} + \overbrace{\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \delta \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e}^{3^\circ \text{ termo}} + \overbrace{\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \delta \bar{\mathbf{p}}^e}^{4^\circ \text{ termo}} \quad (3.4.2)$$

que também pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\delta \mathbf{p}^e = (\mathbf{K}_{GR}^e + \mathbf{K}_{GP}^e + \mathbf{K}_{GM}^e + \mathbf{K}_M^e) \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.3)$$

onde \mathbf{K}_{GR}^e é a *matriz de rigidez geométrica rotacional*, \mathbf{K}_{GP}^e simboliza a *matriz de rigidez geométrica de projeção de equilíbrio*, \mathbf{K}_{GM}^e representa a *matriz de rigidez geométrica de correção de momento* e \mathbf{K}_M^e é a *matriz de rigidez material*, respectivamente.

3.4.1 Matriz de Rigidez Material

A rigidez material é iniciada pela variação das forças internas do elemento \mathbf{p}^e , como já foi descrito; portanto, comparando o quarto termo da Eq. (3.4.2) com (3.4.3), tem-se:

$$\mathbf{K}_M^e \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{T}_R^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \delta \bar{\mathbf{p}}^e \quad (3.4.4)$$

Assumindo que a matriz de rigidez do elemento no sistema corrotacionado é obtida a partir da segunda derivada da energia de deformação interna, obtém-se:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{\partial^2 \bar{U}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_d^e \partial \bar{\mathbf{d}}_d^e} = \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_d^e} \quad (3.4.5)$$

Comparando a Eq. (3.3.9) com (3.4.5), chega-se à:

$$\mathbf{K}_M^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T} \quad (3.4.6)$$

a qual é a matriz de rigidez material do elemento.

3.4.2 Matrizes de Rigidez Geométrica

A matriz de rigidez geométrica rotacional \mathbf{K}_{GR}^e aparece na Eq. (3.4.3) como o gradiente do vetor das forças com relação à rotação rígida do elemento. Consequentemente as forças internas do elemento devem girar rigidamente para preservar o equilíbrio. Comparando as Eqs. (3.4.2) e (3.4.3), tem-se:

$$\mathbf{K}_{GR}^e \delta \mathbf{d}^e = \delta \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e \quad (3.4.7)$$

mas,

$$\bar{\mathbf{p}}_P^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_1^e \\ \bar{\mathbf{m}}_1^e \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e \\ \bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

em que $\bar{\mathbf{p}}_P^e$ é o chamado *vetor de projeção das forças nodais* e representa as forças internas equilibradas do elemento nos eixos locais, $\bar{\mathbf{n}}_1^e$ e $\bar{\mathbf{m}}_1^e$ simbolizam as forças axiais e os momentos no nó 1 relativos aos graus de liberdade translacionais e rotacionais, respectivamente.

Substituindo (3.4.8) em (3.4.7) e considerando a variação da rotação rígida do elemento e suas propriedades, conforme é mostrado por Haugen [39], produz a seguinte expressão:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{n}}_1^e \\ \delta \mathbf{T}_1^T \bar{\mathbf{m}}_1^e \\ \vdots \\ \delta \mathbf{T}_{N^e}^T \bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e \\ \delta \mathbf{T}_{N^e}^T \bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \text{Rot}(\delta \omega_R^e) \bar{\mathbf{n}}_1^e \\ \mathbf{T}_1^T \text{Rot}(\delta \omega_R^e) \bar{\mathbf{m}}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{N^e}^T \text{Rot}(\delta \omega_R^e) \bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e \\ \mathbf{T}_{N^e}^T \text{Rot}(\delta \omega_R^e) \bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e \end{bmatrix} \quad (3.4.9a)$$

$$= -\mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_1^e) \delta \omega_R^e \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{m}}_1^e) \delta \omega_R^e \\ \vdots \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e) \delta \omega_R^e \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e) \delta \omega_R^e \end{bmatrix} = -\mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_1^e) \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{m}}_1^e) \\ \vdots \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e) \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e) \end{bmatrix} \delta \omega_R^e \quad (3.4.9b)$$

$$= -\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}_{nm} \delta \omega_R^e = \left(-\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T} \right) \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.9c)$$

no qual,

$$\bar{\mathbf{F}}_{nm} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\delta \bar{\mathbf{n}}_1^e) \\ \text{Rot}(\delta \bar{\mathbf{m}}_1^e) \\ \vdots \\ \text{Rot}(\delta \bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e) \\ \text{Rot}(\delta \bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta \omega_R^e = \bar{\mathbf{G}} \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.9d)$$

Comparando as Eqs. (3.4.9) e (3.4.7), obtém-se:

$$\mathbf{K}_{GR}^e = -\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{T} \quad (3.4.10)$$

que é a matriz de rigidez geométrica rotacional do elemento e .

A matriz de rigidez geométrica de correção de momento \mathbf{K}_{GM} contribui com um termo para a rigidez total do elemento, a partir da variação da matriz \mathbf{H} , que age apenas nas grandezas relacionadas com os graus de liberdade rotacionais. Analogamente à formulação da matriz de rigidez rotacional, compara-se as expressões (3.4.2) e (3.4.3) para se obter:

$$\mathbf{K}_{GM}^e \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \delta \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{p}}^e \quad (3.4.11)$$

Como $\delta \mathbf{H}^T$ opera apenas nos componentes do vetor das forças internas referentes aos graus de liberdade rotacionais, o lado direito da Eq. (3.4.11) pode ser computado da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \delta \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{p}}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{H}_1^T \bar{\mathbf{m}}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{H}_1^T \bar{\mathbf{m}}_{N^e}^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1^e \delta \omega_{d1}^e \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{N^e}^e \delta \omega_{dN^e}^e \end{bmatrix} \quad (3.4.12a)$$

$$= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \mathbf{L}_1^e & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{0} & \\ & & & & \mathbf{L}_{N^e}^e \end{bmatrix} \delta \mathbf{v}^e \quad (3.4.12b)$$

$$= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \overbrace{\text{diag} [\mathbf{0} \quad \mathbf{L}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_{N^e}]}^{\bar{\mathbf{L}}} \delta \mathbf{v}^e = (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T}) \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.12c)$$

Comparando (3.4.12c) com (3.4.11):

$$\mathbf{K}_{GM}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T} \quad (3.4.13)$$

e se obtém a matriz de rigidez geométrica de correção de momento.

Finalmente, a matriz de rigidez geométrica de equilíbrio do projetor \mathbf{K}_{GP} surge a partir da variação do projetor $\bar{\mathbf{P}}$ em relação à geometria do elemento deformado. Esta rigidez expressa a variação na projeção do vetor das forças internas \mathbf{p}^e com a variação da geometria do elemento. O vetor das forças internas sob influência do operador de projeção tem então um gradiente com relação à mudança do subespaço autoequilibrado.

Pelas Eqs. (3.4.2) e (3.4.3), verifica-se:

$$\mathbf{K}_{GP}^e \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e \quad (3.4.14)$$

Decompondo o produto $\delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{p}}^e$ em forças equilibradas e não-equilibradas (tal procedimento pode ser verificado em [19]), o lado direito da Eq. (3.4.14) pode ser calculado como:

$$\mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{p}}^e = \overbrace{-\mathbf{T} \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n^T \delta \mathbf{p}^e}^{1^\circ \text{ termo}} + \overbrace{\mathbf{T}^T \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{p}}_u^e}^{2^\circ \text{ termo}} \quad (3.4.15a)$$

$$= \left(-\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T} \right) \delta \mathbf{d}^e \quad (3.4.15b)$$

em que,

$$\bar{\mathbf{F}}_n = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_1^e) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \text{Rot}(\bar{\mathbf{n}}_{N^e}^e) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.4.15c)$$

Relacionando as Eqs. (3.4.15c) e (3.4.14), verifica-se que:

$$\mathbf{K}_{GP}^e = -\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{P}} \mathbf{T} \quad (3.4.16)$$

e essa expressão representa a matriz de rigidez geométrica de equilíbrio do projetor. É importante destacar que o segundo termo da Eq. (3.4.15a) foi negligenciado para se deduzir (3.4.15c), pois essa parcela é muito pequena quando as configurações \mathcal{C}^R e \mathcal{C}^D forem muito próximas. Entretanto, segundo Felippa e Haugen [29], quando se combina um problema de casca de curvatura acentuada com uma malha pouco refinada, tal termo não pode ser desconsiderado e o seguinte fator de correção pode ser adicionado à \mathbf{K}_{GP}^e :

$$\Delta \mathbf{K}_{GP}^e = \mathbf{T}^T \left(\bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{P}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{p}}^e \right) \mathbf{T} \quad (3.4.17)$$

Com isso, examinando as Eqs. (3.4.6), (3.4.10), (3.4.13) e (3.4.16) e comparando com a Eq. (3.4.3), obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento, sem o termo de correção obtido por (3.4.17), segundo a formulação corrotacional CSE:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \left(\overbrace{\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}}}^{\mathbf{K}_M^e} - \overbrace{\bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}}}^{\mathbf{K}_{GR}^e} + \overbrace{\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{P}}}^{\mathbf{K}_{GM}^e} - \overbrace{\bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n \bar{\mathbf{P}}}^{\mathbf{K}_{GP}^e} \right) \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_R^e \mathbf{T} \quad (3.4.18)$$

no qual $\bar{\mathbf{K}}_R^e$ significa a *matriz de rigidez tangente local*, ou seja, é a matriz de rigidez tangente,

porém, no sistema corrotacionado.

3.4.3 Propriedades da Matriz de Rigidez Tangente

Segundo Nour-Omid e Rankin [71], a matriz de rigidez tangente \mathbf{K}^e dada pela Eq. (3.4.18) tem algumas propriedades que devem ser avaliadas para que a implementação computacional seja viável:

$$\bar{\mathbf{K}}_R^e \bar{\mathbf{S}} = -\bar{\mathbf{F}}_{nm}, \quad \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{K}}_R^e = -\bar{\mathbf{f}}_n^T, \quad \bar{\mathbf{K}}_M \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{GR} \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{F}}_{nm}, \quad (3.4.19a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{GP} \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{K}}_M = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{S}}^T (\bar{\mathbf{K}}_{GR} + \bar{\mathbf{K}}_{GP}) = -\bar{\mathbf{F}}_n^T \quad (3.4.19b)$$

Dentre as vantagens da formulação CR, a avaliação *a priori* do grupo de equações descritas em (3.4.19) possibilita o controle da metodologia descrita. Além disso, indica se a matriz de projeção foi utilizada corretamente no cálculo da rigidez. Contudo, a satisfação dessa condição não garante consistência entre as forças internas e matriz de rigidez tangente. Toda a verificação sobre a robustez de tal procedimento pode ser numericamente feita sob três aspectos, segundo a descrição corrotacional:

1. Formulação CR Consistente (C);
2. Formulação CR Equilibrada Consistente (EC);
3. Formulação CR Equilibrada Simetrizável Consistente (ESC).

Na primeira formulação, o vetor de forças internas descrito pela Eq. (3.3.9) é simplificado fazendo $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{I}$ e $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{I}$, enquanto $\delta \bar{\mathbf{d}}_d^e = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} \delta \bar{\mathbf{d}}^e$ é preservado para restabelecer os graus de liberdade deformacionais. Desde que $\delta \bar{\mathbf{P}} = \delta \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$, a expressão para a matriz de rigidez tangente dada por (3.4.2) é simplificada para os termos de rigidez material e geométrica rotacional:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}_d^e \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T (\bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}}) \mathbf{T} \quad (3.4.20)$$

Assim, as forças internas estão em equilíbrio em relação à configuração \mathcal{C}^R . Para estruturas de casca, uma vez que a deformação de membrana é pequena, a matriz de rigidez material se aproxima de uma matriz simétrica. Com o refino da malha, o vetor axial de rotação deformacional, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{da}$, torna-se cada vez menor e, por consequência, a matriz $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_{da})$ se aproxima da matriz identidade. Esse tipo de abordagem é insatisfatória para problemas de casca com curvatura acentuada, uma vez que as configurações deformada e corrotacionada se afastam uma da outra.

O segundo item apresenta a formulação corrotacional equilibrada consistente, em que as forças internas descritas por (3.3.9) são simplificadas da mesma maneira que a formulação consistente, entretanto, o projetor $\bar{\mathbf{P}}$ é mantido. Dessa forma, obtém-se:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{d}}_d^e \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^T \left(\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{F}}_{nm} \bar{\mathbf{G}} - \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{F}}_n^T \bar{\mathbf{P}} \right) \mathbf{T} \quad (3.4.21)$$

Devido a presença de $\bar{\mathbf{P}}$ em ambos os lados, a matriz de rigidez material obtida pela formulação EC se aproxima de uma matriz simétrica com o refino da malha, não obstante a magnitude da deformação. Apesar da matriz de rigidez geométrica no nível do elemento não ser simétrica, ao agrupar todas as rijezas geométricas dos elementos na matriz global, essa matriz se aproximará de sua forma simétrica quando o equilíbrio for alcançado, corroborando com o fato de que não há momentos nodais aplicados e que as condições de contorno estão preservadas.

Para a formulação ESC, todos os termos da Eq. (3.3.9) são mantidos. Assim como na formulação EC, logo que a estrutura estiver próxima do equilíbrio, a matriz de rigidez global geométrica se tornará simétrica. Porém, a vantagem dessa formulação para as duas primeiras está no fato de ser desnecessário o refino da malha para que o equilíbrio seja obtido.

3.5 Exigências da Formulação EICR

Nesta seção, destaca-se a importância de itemizar alguns aspectos fundamentais que ajudam a avaliar a eficiência numérica da formulação EICR, a saber:

- Equilíbrio \rightarrow é uma exigência fundamental para que o caminho de equilíbrio seja traçado corretamente no processo de solução iterativa e incremental.
- Consistência \rightarrow uma formulação é chamada de consistente se a matriz de rigidez tangente corresponde ao gradiente das forças internas em relação aos graus de liberdade globais. Essa condição determina a taxa de convergência da solução iterativa. Em outras palavras, uma matriz de rigidez inconsistente pode demorar a convergir, contudo o caminho de equilíbrio não é alterado, desde que isso seja inteiramente prescrito pela condição anterior. Além disso, a ausência de consistência pode afetar as análises de pontos de bifurcação (flambagem) que é o aspecto fundamental nesse tipo de problema.
- Invariância \rightarrow a principal característica de falta de invariância está no modo que o vetor de deslocamentos deformacionais é extraído dos deslocamentos totais. Se a ausência de invariância for observada, a correlação entre a variação das rotações de corpo rígido com os respectivos graus de liberdade, que é feita pela matriz \mathbf{G} , será correta.
- Simetrizabilidade \rightarrow isso significa que pode acarretar em uma matriz de rigidez tangente não simétrica para elementos com graus de liberdade de rotação no espaço. En-

tretanto, pode-se utilizar processos de simetrização sem prejudicar os resultados finais ou mesmo o grau de convergência da solução.

- Independência de elemento \rightarrow isso implica que as operações com os vetores e matrizes relacionadas com os efeitos de não-linearidade geométrica são as mesmas para todos os elementos que possuem os mesmos nós e graus de liberdade.

Todos os atributos das formulações corrotacionadas C, EC e ESC tendo em vista as exigências descritas estão sumarizados na Tab. 3.3.

Tabela 3.3: Propriedades das formulações corrotacionadas C, EC e ESC.

Formulação	Autoequilíbrio ¹	Consistente ²	Invariante ³	Simetrizável ⁴	Elem. Indep. ⁵
C		✓	✓		✓
EC	✓	✓	✓		✓
ESC	✓	✓	✓	✓	✓

Por conduzir a algumas exigências em sua formulação, a descrição corrotacional apresenta algumas desvantagens em relação às outras descrições, como a Lagrangeana, por exemplo. Dentre elas, pode-se destacar:

- (D1) A formulação corrotacional não é vantajosa no estudo de problemas que envolvem grandes deformações plásticas, pois a complexidade adicional provenientes da dupla configuração (\mathcal{C}^R e \mathcal{C}^D) não é compensada por suas vantagens.
- (D2) Envolve formulações matemáticas mais complexas na avaliação dos graus de liberdade de rotação.
- (D3) A formulação é eficiente somente para o caso de elementos finitos com geometria inicial simples, ou seja, elementos de treliças e vigas contendo dois nós e elementos de placas ou cascas contendo três ou quatro nós. Para elementos com geometrias mais complexas, o nível de dificuldade aumenta bastante. Felizmente, os elementos com geometria mais simples são, geralmente, os elementos utilizados com maior frequência na análise não-linear geométrica de estruturas.

Apesar de apresentar algumas desvantagens, a formulação CR, que gradualmente está substituindo a descrição Lagrangeana Atualizada, tem algumas vantagens:

¹ Se o elemento é autoequilibrável na configuração deformada \mathcal{C}^D .

² Se a matriz tangente é o gradiente das forças internas do elemento.

³ Se a formulação não é suscetível à escolha da numeração dos nós.

⁴ Se a formulação mantém a convergência utilizando o Método de Newton com a matriz de rigidez tangente simetrizada.

⁵ Se as operações matriciais e vetoriais que computam os efeitos da não-linearidade geométrica são os mesmos para todos os elementos com as mesmas características (número de nós e graus de liberdade).

- (V1) Eficiência no tratamento de problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações, porém, pequenas deformações, lembrando que este assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais.
- (V2) Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existentes, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial, se a formulação EICR for empregada.
- (V3) Facilidade em aplicar o problema da não-linearidade material, caracterizada por pequenas deformações, juntamente, com não-linearidades geométricas.
- (V4) A transformação de corpo rígido reorienta automaticamente a direção do material, desde que (V1) seja respeitada. Essa qualidade elimina a necessidade de trabalhar com taxas invariantes de tensão, que são normalmente complicadas, da mecânica do contínuo.
- (V5) Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas Lagrangeanas.

Assim, o presente capítulo apresentou amplamente os tópicos inerentes à descrição cinemática corrotacional e como é feita a formulação de um elemento genérico. O próximo capítulo irá apresentar toda a formulação do elemento de casca utilizado neste trabalho, particularizando os conceitos apresentados neste capítulo para tal elemento.

O Elemento Finito Triangular de Casca EICR

4.1 Introdução

Após a descrição do elemento corrotacional genérico, o presente capítulo irá particularizar a formulação EICR para o elemento finito triangular de casca. O elemento proposto é baseado na notação empregada por Nour-Omid e Rankin [71] com algumas alterações descritas por Felippa e Haugen [29]. Além de formular detalhadamente o elemento, o intuito deste capítulo é padronizar a terminologia empregada em formulações corrotacionais, independentemente de qual formulação corrotacional está sendo utilizada.

4.2 Relações Geométricas e Cinemáticas

A Fig. 4.1 apresenta o elemento de casca utilizado neste trabalho. Ele possui dezoito graus de liberdade (GDL) no total, seis por nó, sendo três deslocamentos e três rotações.

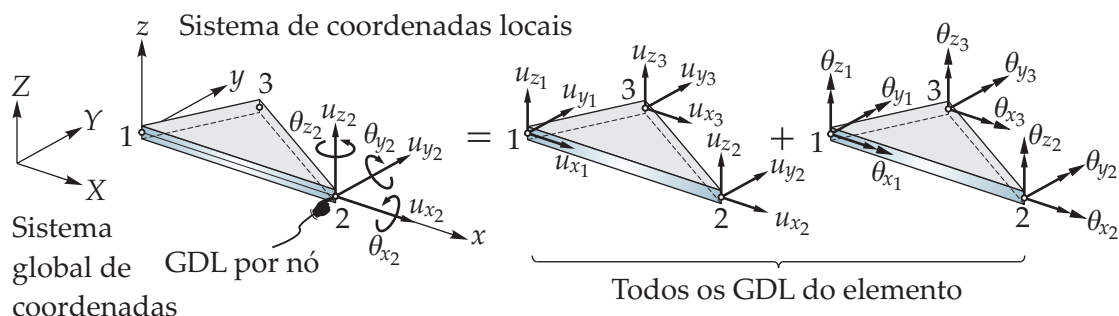


Figura 4.1: Configuração dos nós e dos graus de liberdade do elemento triangular.

Os deslocamentos ao longo das coordenadas de um ponto material nos eixos x, y

e z são definidos por u_x, u_y e u_z , respectivamente. As rotações normais aos eixos x e y são descritas por θ_x e θ_y , respectivamente, e θ_z é o grau de liberdade introduzido por Rankin e Brogan [82] que corresponde ao GDL de rotação torcional, também chamado de *drilling rotation*. Esses graus de liberdade são os mesmos descritos na Tab. 3.1 do Capítulo 3, porém, com uma notação levemente modificada (fazendo $\{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\}$).

O movimento do elemento descrito na Fig. 4.1 desde a sua configuração inicial \mathcal{C}^0 até a configuração atual \mathcal{C}^D , é mostrado pela Fig. 4.2.

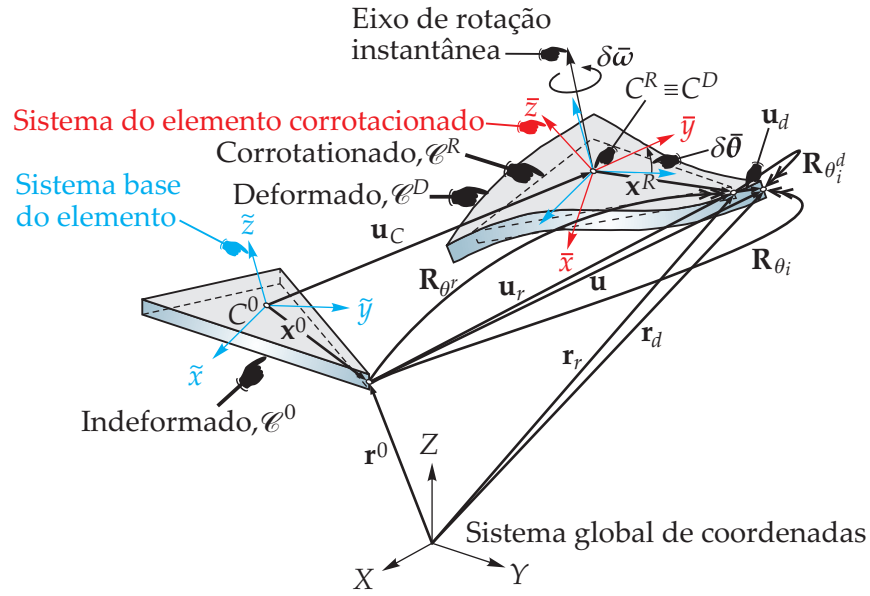


Figura 4.2: Conceitos da descrição cinemática corrotacional enfatizando a separação dos movimentos para o elemento de casca triangular.

Por conviniência e para facilitar o entendimento da Fig. 4.2, a Fig. 4.3 mostra o elemento originalmente no plano xy e se deslocando e deformando no mesmo plano. O eixo z está saindo do plano do papel e os sistemas global e base do elemento têm origem no mesmo ponto, ou seja, $\mathbf{X}\{X, Y, Z\} \equiv \tilde{\mathbf{x}}\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$.

Dessa forma, o sistema base do elemento $\tilde{\mathbf{x}}\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$ pode ser mapeado a partir das coordenadas globais $\mathbf{X}\{X, Y, Z\}$ em função do vetor unitário direcional $\hat{\mathbf{e}}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{e}}_1^0)^T \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^0)^T \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^0)^T \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad (4.2.1a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^0 = \frac{X_{21}}{\|X_{21}\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^0 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1^0 \times X_{31}}{\|\hat{\mathbf{e}}_1^0 \times X_{31}\|} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{e}}_2^0 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3^0 \times \hat{\mathbf{e}}_1^0}{\|\hat{\mathbf{e}}_3^0 \times \hat{\mathbf{e}}_1^0\|} \quad (4.2.1b)$$

sendo $X_{ij} = X_i - X_j$. Vale lembrar que esta transformação linear já foi descrita pela Fig. 3.3

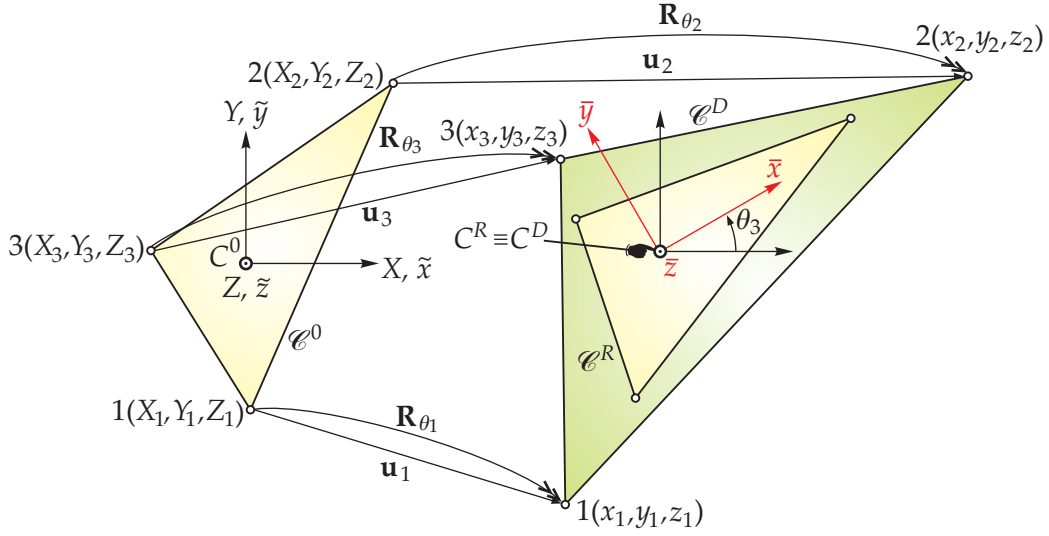


Figura 4.3: Vetores que ligam as configurações inicial e deformada do elemento de casca.

e pela Eq. (3.2.3). Este procedimento é feito para fazer o alinhamento do sistema corrotacionado a um dos lados do elemento, procedimento similar ao apresentado por Nour-Omid e Rankin [71]. Nesta tese, a origem do sistema local está localizada no centroide do elemento, assim como descrito na seção 3.2.1, e este é a média aritmética das coordenadas nodais de cada elemento, enquanto a direção unitária $\hat{\mathbf{e}}_1^0$ é alinhada com a direção do lado $\overline{12}$ do elemento.

A fim de facilitar a visualização dessa metodologia, a Fig. 4.4 apresenta graficamente o mapeamento, ou transformação linear, \mathbf{T}_0 , sendo que tanto o vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_3^0$ e o eixo \tilde{z} são ortogonais ao plano $\tilde{x}\tilde{y}$.

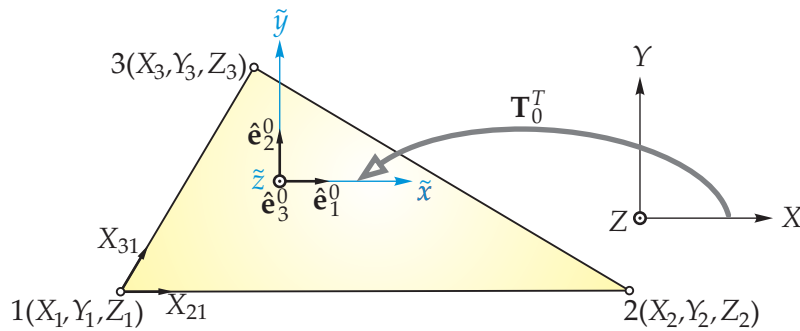


Figura 4.4: Transformação linear \mathbf{T}_0 sobre o sistema base do elemento $\tilde{\mathbf{x}} \{ \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \}$.

Agora, voltando à Fig. 4.3, percebe-se que os nós 1, 2 e 3 sofrem translações representadas por \mathbf{u}_i , tal que $i = 1, 2$ e 3 . Esse vetor pode ser dividido em duas parcelas: uma de translação de corpo rígido \mathbf{u}_i^r e outra de translação deformacional \mathbf{u}_i^d . Em seguida, o sistema sofre rotações θ_i em relação ao sistema inicial $\tilde{\mathbf{x}}$, gerando, assim, curvaturas no elemento.

Finalmente, a posição nodal na configuração deformada (atual) pode ser expressa por:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i, \quad \text{sendo} \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^r + \mathbf{u}_i^d \quad (\text{para } i = 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.2.2)$$

Análogo ao que foi apresentado pela Eq. (4.2.1), pode-se mapear o sistema corrotacional $\bar{\mathbf{x}} \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ a partir do sistema global de coordenadas em função do vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{e}}_1^R)^T \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^R)^T \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^R)^T \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta^T, \quad \text{com} \quad (4.2.3a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^0 = \frac{x_{21}}{\|x_{21}\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^0 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1^0 \times x_{31}}{\|\hat{\mathbf{e}}_1^0 \times x_{31}\|} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{e}}_2^0 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3^0 \times \hat{\mathbf{e}}_1^0}{\|\hat{\mathbf{e}}_3^0 \times \hat{\mathbf{e}}_1^0\|} \quad (4.2.3b)$$

Uma vez definido o sistema de eixos corrotacionais, estabelece-se a mudança de coordenadas entre o sistemas global e o local com o corrotacionado através das seguintes operações:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_R \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{T}_R \mathbf{X} \mathbf{T}_R^T \quad (4.2.4)$$

A seguir, determinam-se os deslocamentos e rotações deformacionais medidos no sistema corrotacionado, obtidos a partir dos deslocamentos generalizados do elemento. Então, são computadas localmente as posições do i -ésimo nó do elemento, conforme descreve a Fig. 4.5, nas configurações inicial \mathcal{C}^0 e deformada \mathcal{C}^D , designadas respectivamente pelos vetores $\bar{\mathbf{X}}_i$ e $\bar{\mathbf{x}}_i$.

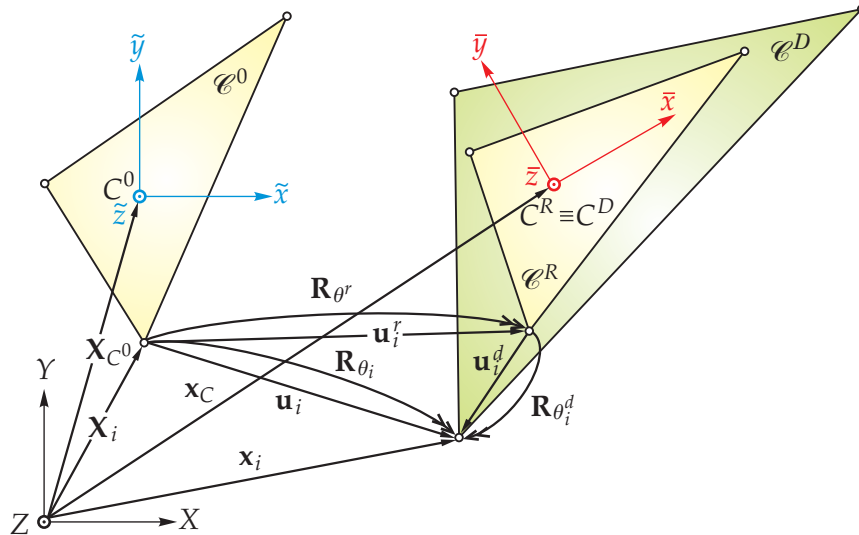


Figura 4.5: Translações e rotações do elemento triangular de casca de um nó genérico i .

Esse cálculo foi introduzido genericamente pelas Eqs. (3.2.16) e (3.2.17). Para o ele-

mento triangular de casca, tais expressões ficam explicitamente:

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \mathbf{T}_0 (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{C^0}), \quad \mathbf{X}_{C^0} = \frac{1}{3} \sum_{a=1}^3 \mathbf{X}_a \quad (4.2.5a)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C), \quad \mathbf{x}_C = \frac{1}{3} \sum_{a=1}^3 \mathbf{x}_a \quad (4.2.5b)$$

Substituindo (4.2.5) em (4.2.2) e avaliando localmente, obtém-se:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{X}}_i = \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C) - (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{C^0}) \quad (4.2.6)$$

sendo que \mathbf{u}_i^c representa o vetor que contém os deslocamentos corrotacionais. Lembrando que a rotação total θ_i é composta por uma parcela rígida θ^r e outra deformacional θ^d e que a rotação de corpo rígido do elemento é, por definição, a rotação entre os eixos $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$, então:

$$\mathbf{R}_{\theta_i} = \mathbf{R}_{\theta_i^d} \mathbf{R}_{\theta^r}, \quad \text{com} \quad \mathbf{R}_{\theta^r} = \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0 \quad (4.2.7)$$

Rearranjando os termos da Eq. (4.2.7) chega-se à:

$$\mathbf{R}_i^d = \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{R}_{\theta^r}^T = \mathbf{R}_{\theta_i} \left(\mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_0 \right)^T = \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0^T \mathbf{T}_R \quad (4.2.8)$$

Com isso, a rotação corrotacional $\bar{\theta}_i$ pode ser obtida a partir da mudança de coordenadas indicada pela Eq. (4.2.4), de tal maneira que:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i} = \mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0^T \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_i = \text{Rot}(\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i}), \quad (\text{para } i = 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.2.9)$$

Assim, a mudança de variáveis que é inerente à formulação CR fica definida pelas Eqs. (4.2.6) e (4.2.9). Além disso, todos os graus de liberdade foram computados e pode-se expressar os deslocamentos corrotacionais dos três nós do elemento triangular de casca, inicialmente apresentados genericamente na Tab. 3.1, por:

$$\bar{\mathbf{d}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta}_1 = \text{Rot}(\mathbf{R}_{\bar{\theta}_1}) = \text{Rot}(\mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_1} \mathbf{T}_0^T) \quad (4.2.10a)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta}_2 = \text{Rot}(\mathbf{R}_{\bar{\theta}_2}) = \text{Rot}(\mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_2} \mathbf{T}_0^T) \quad (4.2.10b)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta}_3 = \text{Rot}(\mathbf{R}_{\bar{\theta}_3}) = \text{Rot}(\mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_3} \mathbf{T}_0^T) \quad (4.2.10c)$$

ou matricialmente por,

$$\bar{\mathbf{d}} = \left\{ \underbrace{u_{x_1} \ u_{y_1} \ u_{z_1}}_{\bar{\mathbf{u}}_1} \underbrace{\theta_{x_1} \ \theta_{y_1} \ \theta_{z_1}}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_1} \underbrace{u_{x_2} \ u_{y_2} \ u_{z_2}}_{\bar{\mathbf{u}}_2} \underbrace{\theta_{x_2} \ \theta_{y_2} \ \theta_{z_2}}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_2} \underbrace{u_{x_3} \ u_{y_3} \ u_{z_3}}_{\bar{\mathbf{u}}_3} \underbrace{\theta_{x_3} \ \theta_{y_3} \ \theta_{z_3}}_{\bar{\boldsymbol{\theta}}_3} \right\}^T \quad (4.2.11)$$

Note-se que ao comparar as Eqs. (4.2.10) e (4.2.11) tem uma notação um pouco diferenciada do que foi apresentado pela Tab. 3.1 do Capítulo 3. O superíndice e e o subíndice d enfatizando o elemento e e que o vetor de deslocamentos e rotações nodais é formado pela parcela deformacional foram omitidos para deixar a notação mais limpa. Dessa forma, todos os graus de liberdade apresentados pela Fig. 4.1 foram computados.

4.3 Equações de Equilíbrio

4.3.1 A Energia Interna

Quando o sólido atinge uma configuração de equilíbrio, a variação de energia total do sistema é nula. Em outras palavras, o trabalho virtual externo é igual ao trabalho virtual interno, isto é,

$$\delta W + \delta U = 0 \quad (4.3.1a)$$

$$\delta W = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (4.3.1b)$$

$$\delta U = - \sum \int_{V_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV_0 \quad (4.3.1c)$$

em que \mathbf{f} representa o vetor de força externas, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações de Cauchy-Green e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy.

O trabalho realizado pelas forças internas durante os deslocamentos virtuais rígidos é nulo e, portanto, é proveniente apenas da parcela deformacional de $\delta \mathbf{d}$, denotada por $\delta \mathbf{d}^d$. Além disso, por se tratar de uma quantidade escalar, o trabalho virtual interno proveniente dos deslocamentos deformacionais medidos nos sistemas global e local devem ser iguais, o que resulta em:

$$\delta U \delta \mathbf{d} = \delta U \delta \mathbf{d}_d = \delta U \delta \bar{\mathbf{d}}_d \quad (4.3.2)$$

onde $\delta \bar{\mathbf{d}}_d$ simboliza a variação dos deslocamentos corrotacionais generalizados do elemento, representando a parcela dos deslocamentos deformacionais escrita no sistema local. Segundo Felippa e Haugen [29], localmente, pode-se supor que a relação entre a deformação e o deslocamento seja linear, então é possível definir a seguinte expressão para a variação do trabalho virtual interno em relação à variação dos deslocamentos corrotacionais:

$$\delta U = - \sum \int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{d}}_d^T \mathbf{B}_d^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = - \sum (\delta \bar{\mathbf{d}}_d)^T \bar{\mathbf{f}} \quad (4.3.3)$$

em que \mathbf{B}_d representa a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos deformacionais e $\bar{\mathbf{f}}$ é o vetor de forças corrotacionais generalizadas do elemento que realizam trabalho com os deslocamentos virtuais $\delta\bar{\mathbf{d}}_d$, de forma que:

$$\bar{\mathbf{f}} = \int_{V_0} \mathbf{B}_d^T \sigma dV_0 \quad (4.3.4)$$

Agora, relaciona-se $\delta\bar{\mathbf{d}}_d$ com a variação $\delta\mathbf{d}$ dos deslocamentos nodais generalizados do elemento no sistema global. Para melhor compreensão, estabelece-se inicialmente a seguinte relação:

$$\delta\bar{\mathbf{d}}_d = \bar{\mathbf{P}}\delta\mathbf{d}^e \quad (4.3.5)$$

sendo que $\delta\mathbf{d}^e$ é o próprio $\delta\mathbf{d}$ expresso no sistema local. Em seguida,

$$\delta\mathbf{d}^e = \mathbf{G}^T \delta\mathbf{d} \quad (4.3.6)$$

logo,

$$\delta\bar{\mathbf{d}}_d = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{G}^T \delta\mathbf{d} \quad (4.3.7)$$

Os incrementos $\delta\bar{\mathbf{d}}$ e $\delta\mathbf{d}^e$ são representados no sistema local e global, respectivamente. Portanto, o primeiro refere-se aos nós na configuração \mathcal{C}^R e o segundo aos nós na configuração corrente \mathcal{C}^D . Se a configuração \mathcal{C}^R for a ideal, ou seja, resulte de todo o movimento de corpo rígido do elemento a partir de \mathcal{C}^0 , a Eq. (4.3.5) implica que a matriz $\bar{\mathbf{P}}$ tem a propriedade de remover esse movimento de $\delta\mathbf{d}^e$, deixando em $\delta\bar{\mathbf{d}}_d$ apenas os deslocamentos e rotações que provocam deformação. Nesse caso, a matriz $\bar{\mathbf{P}}$ não é inversível com um número de autovalores nulos igual ao número de modos de corpo rígido por ela removido, sendo os demais autovalores unitários [29].

Note-se que \mathbf{G} simplesmente relaciona as componentes de um mesmo vetor nos sistemas local e global, enquanto $\bar{\mathbf{P}}$ relaciona dois vetores distintos num mesmo sistema de eixos. Vale ressaltar que o tensor de projeção $\bar{\mathbf{P}}$ atua como um filtro para os deslocamentos deformacionais, ou seja, extrai apenas a parcela deformacional do deslocamento virtual nodal $\delta\mathbf{d}^e$. O projetor também é capaz de converter um vetor de forças em desequilíbrio em um vetor de forças autoequilibradas, assim como transformar a matriz de rigidez do elemento em uma matriz sem modos espúrios de corpo rígido, de modo que o elemento implementado é dito consistente, isto é, apresenta as propriedades corretas quando submetido ao movimento de corpo rígido.

A substituição da Eq. (4.3.7) em (4.3.3) produz:

$$\delta U = - \sum \delta\mathbf{d}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{p} \quad (4.3.8)$$

onde,

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}} = \sum \mathbf{G} \mathbf{f}^e = \sum \mathbf{f} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (4.3.9)$$

O vetor das forças nodais generalizadas internas \mathbf{p} de toda a estrutura é proveniente da contribuição \mathbf{f} de cada elemento, cuja representação no sistema local é \mathbf{f}^e . As forças $\bar{\mathbf{f}}$ e \mathbf{f}^e são representadas no sistema local, entretanto a primeira refere-se aos nós na configuração corrotacionada e a segunda aos nós na configuração deformada (atual).

A substituição das Eqs. (4.3.1b) e (4.3.8) em (4.3.1a) conduz a resolução de um sistema não-linear dado por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.3.10)$$

cujas solução é obtida por procedimento incremental-iterativo. Muitos são os métodos iterativos aplicados para resolver esse problema. Neste trabalho é aplicado o método de Newton-Raphson.

Seja $\mathbf{r}(a^k) = \mathbf{f} - [\mathbf{p}(a^k)](a^k)$ o vetor residual, o problema consiste em encontrar a solução aproximada a^k tal que $\|\mathbf{r}(a^k)\| \leq \text{tolerância}$. Assumindo que:

$$a^{k+1} = a^k + \Delta a^k \quad (4.3.11)$$

e computando a correção incremental Δa^k por:

$$\mathbf{r}(a^{k+1}) = \mathbf{r}(a^k + \Delta a^k) = \mathbf{0} \quad (4.3.12)$$

Considerando que $\mathbf{r}(a)$ é suficientemente regular, expandindo $\mathbf{r}(a)$ em uma série de Taylor em a^k e truncando após o termo linear, obtém-se:

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}(a^k + \Delta a^k) \cong \mathbf{r}(a^k) + [\mathbf{p}(a^k)] \Delta(a^k) \quad (4.3.13)$$

O algoritmo pode ser descrito como:

1. inicialize a^k , erro = 1, tolerância = 10^{-6} e $k = 0$
2. enquanto (erro > tolerância) faça:
 - Compute o fator de correção Δa^k resolvendo o seguinte sistema linear

$$[\mathbf{p}(a^k)] \Delta(a^k) = -\mathbf{r}(a^k) \quad (4.3.14)$$

- Calcule o erro através de:

$$\text{erro} = \|\mathbf{r}(a^k)\| \quad (4.3.15)$$

- Execute a atualização, ou seja,

$$k \leftarrow k + 1 \quad \text{e} \quad a^{k+1} \leftarrow a^k + \Delta a^k \quad (4.3.16)$$

3. fim do enquanto

Esse algoritmo foi exposto de maneira sucinta, pois não é intuito deste trabalho apresentar métodos de solução de equações não-lineares uma vez que esse assunto é abordado de maneiras específica e ampla na literatura [9, 16, 17, 23, ?, 44, 93, 117].

4.3.2 Atualização dos Deslocamentos

O mesmo algoritmo utilizado na seção anterior, é empregado para os deslocamentos de tal maneira que o método de Newton-Raphson para atualizar os deslocamentos nodais generalizados se dá da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{d}}_d^{k+1} = \bar{\mathbf{d}}_d^k + \Delta \bar{\mathbf{d}}_d^k \quad (4.3.17)$$

É importante destacar que a Eq. (4.3.17) contém tanto os graus de liberdade de translação como os de rotação, ver Eq. (4.2.11). Portanto, ao aplicar o método de Newton-Raphson em (4.2.11) surge uma inconsistência matemática para os GDL de rotação. Sob o aspecto numérico, os deslocamentos atualizados são apenas candidatos à posição de equilíbrio que é identificada por meio de um critério de convergência. Com isso, adota-se uma nova estimativa para o deslocamento \mathbf{u}_i usando a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^k + \Delta \mathbf{u}_i^k \quad (4.3.18)$$

Enquanto que para a rotação, essa estimativa embora matematicamente inconsistente, porém intrínseca ao método, é dada por:

$$\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} = \boldsymbol{\theta}_i^k + \Delta \boldsymbol{\theta}_i^k \quad (4.3.19)$$

Não obstante o incremento de rotação seja inconsistente, o tensor de rotação pode ser consistentemente atualizado conforme a seguinte equação:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\Delta \boldsymbol{\theta}_i}^k + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k \quad (4.3.20)$$

No caso das correções de rotação serem suficientemente pequenas, a Eq. (4.3.20) fica:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k + \delta \mathbf{R}_{\boldsymbol{\theta}_i}^k \quad (4.3.21)$$

em que δ também simboliza um operador variacional, todavia a mudança de $\Delta \rightarrow \delta$ foi

realizada para enfatizar que a Eq. (4.3.21) trata de pequenas correções.

A fim de solucionar o problema de inconsistência do incremento de rotação, define-se uma nova variável iterativa de giro de tal forma que:

$$\mathbf{R}_{\bar{\omega}_i} = \mathbf{R}_{\theta_i} \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{R}_{\theta_i} = \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}_i} \mathbf{R}_{\bar{\omega}_i} \quad (4.3.22)$$

e substituindo (4.3.22) em (4.3.21), obtém-se:

$$\mathbf{R}_{\bar{\omega}_i}^{k+1} = \mathbf{R}_{\bar{\omega}_i}^k + \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}_i} \mathbf{R}_{\bar{\omega}_i} \quad (4.3.23)$$

Segundo Crisfield [21], a Eq. (4.3.23) proporciona uma rotação consistente do elemento. Rearranjando a segunda parte de (4.3.22) e retirando o subíndice nodal chega-se à:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} = \delta \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{R}_{\bar{\omega}}^T \quad (4.3.24)$$

Após um enfadonho algebrismo, Nour-Omid [71] mostra que a Eq. (4.3.24) pode relacionar as rotações virtuais $\delta \theta$ com as nodais $\delta \omega$ por meio de:

$$\delta \theta = \mathbf{H}(\theta) \delta \omega \quad (4.3.25)$$

onde,

$$\mathbf{H}(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}_{\theta} + \zeta \bar{\mathbf{S}}_{\theta}^2 \quad \text{com} \quad \zeta = \frac{2 \sin \theta - \theta (1 + \cos \theta)}{2 \theta^2 \sin \theta} \quad (4.3.26)$$

Com este procedimento, foi possível atualizar os deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{u}}_i$ e o tensor rotação associado à $\bar{\theta}_i$ de maneira robusta e consistente.

4.4 Matriz de Rigidez Linear do Elemento

Uma vez obtido o vetor dos deslocamentos corrotacionais generalizados \mathbf{d} de forma consistente, é possível relacioná-lo com a matriz de rigidez tangente do elemento \mathbf{K}^e com as forças corrotacionais introduzidas em (4.3.3) por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}^e \mathbf{d}, \quad \text{com} \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{m}_i \end{Bmatrix} \quad (4.4.1)$$

em que os vetores \mathbf{n}_i e \mathbf{m}_i representam as componentes de força translacional e de momento no i -ésimo nó do elemento, respectivamente. É importante lembrar que devido à mudança de variável iterativa de rotação visto na seção anterior, é necessário determinar $\bar{\mathbf{f}}$ e $\bar{\mathbf{K}}^e$ aplicando

a seguinte relação:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right)^T = \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right)^T \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}} \right)^T = \mathbf{H}^T \mathbf{f} \quad (4.4.2)$$

onde \mathbf{H} representa uma matriz quadrada 18×18 que foi introduzida pela Eq. (3.2.36), mas que para o elemento triangular de casca especificamente fica:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

e \mathbf{H}_{ij} são submatrizes quadradas de sexta ordem cujos índices variam de 1 ao número de nós do elemento e que aplicando a Eq. (4.3.25), obtêm-se:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_{ij} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_i} \right) \end{bmatrix} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_i) \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker e \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ são as matrizes identidade e nula de terceira ordem, respectivamente.

A partir da Eq. (4.4.1), defini-se:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \quad (4.4.5)$$

que é a matriz de rigidez linear do elemento. Na definição dessa matriz foi utilizado o elemento finito de casca plano ANDES proposto inicialmente por Militello [68]. Portanto, neste ponto foi utilizado uma das vantagens do elemento EICR, ou seja, a reutilização de um elemento desde que os mesmos graus de liberdade sejam usados. Com isso, o elemento de casca ANDES foi utilizado como ferramenta para obtenção da matriz de rigidez linear e, assim, todo o procedimento para se obter tal matriz é descrito detalhadamente em [39, 68].

Substituindo (4.4.2) em (4.4.5), produz:

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \frac{\partial (\mathbf{H}^T \mathbf{f})}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \quad (4.4.6)$$

que após aplicar a regra da cadeia fica,

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \mathbf{H}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} + \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \mathbf{f} = \bar{\mathbf{K}}_1^e + \bar{\mathbf{K}}_2^e \quad (4.4.7)$$

sendo que $\bar{\mathbf{K}}_1^e$ e $\bar{\mathbf{K}}_2^e$ correspondem a parcela simétrica e não-simétrica da rigidez linear, respectivamente. A parte simétrica pode ser expandida para:

$$\bar{\mathbf{K}}_1^e = \mathbf{H}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \mathbf{H}^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right) \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right) = \mathbf{H}^T \mathbf{K}^e \mathbf{H} \quad (4.4.8)$$

Note que \mathbf{f} independe de $\bar{\mathbf{d}}$ na segunda parcela da Eq. (4.4.7), com isso:

$$\bar{\mathbf{K}}_2^e = \mathbf{f} \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \quad (4.4.9)$$

Aplicando as Eqs. (4.4.1) e (4.4.4) em (4.4.9), tem-se:

$$\bar{\mathbf{K}}_2^e = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}^T \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{H}_{22}^T \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{H}_{33}^T \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_1^T \mathbf{m}_1 \} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{n}_3}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_3^T \mathbf{m}_3 \} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \mathbf{H} \quad (4.4.10)$$

Como \mathbf{f} é constante em $\bar{\mathbf{K}}_2^e$, então: $\left[\frac{\partial \mathbf{n}_1}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{n}_2}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{n}_3}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] = [\mathbf{0}]_{3 \times 18}$ e, depois de algumas operações algébricas:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_1^T \mathbf{m}_1 \} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{L}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]_{3 \times 18}, \quad \mathbf{L}_1 = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_1^T \mathbf{m}_1 \} \quad (4.4.11a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_2^T \mathbf{m}_2 \} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]_{3 \times 18}, \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_2} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_2^T \mathbf{m}_2 \} \quad (4.4.11b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_3^T \mathbf{m}_3 \} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{L}_3]_{3 \times 18}, \quad \mathbf{L}_3 = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_3} \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})_3^T \mathbf{m}_3 \} \quad (4.4.11c)$$

em que $\mathbf{0}$ simboliza a matriz nula 3×3 e as submatrizes \mathbf{L}_i são detalhadas por Nour-Omid e Rankin [71] e dadas por:

$$\mathbf{L}_i = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{\theta}_i} + \xi \left(\boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{m}_i \mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{m}_i^T - 2 \mathbf{m}_i \boldsymbol{\theta}_i^T \right) + \mu \bar{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{\theta}_i}^2 \mathbf{m}_i \boldsymbol{\theta}_i^T \quad (\text{com } i = 1, 2 \text{ e } 3) \quad (4.4.12)$$

onde ξ foi dado por (4.3.26) e

$$\vartheta = \frac{1}{\theta} \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\theta (\sin \theta + \theta) - 8 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4\theta^2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{360} + \frac{1}{7560} \theta^2 + \frac{1}{201600} \theta^4 + \dots \quad (4.4.13)$$

A expressão de ϑ foi obtida pela simplificação de resultados apresentados por Nour-Omid e Rankin [71, p. 378]. Ressalta-se que ao observar as Eqs. (4.4.11) e (4.4.12), nota-se que \mathbf{L}_i nada mais é do que a avaliação de $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$ no nó i e que $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m})$ é a contração de $\frac{\partial \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})^T}{\partial \boldsymbol{\omega}}$ com o vetor \mathbf{m} . Por fim, aplica-se essas relações na Eq. (4.4.10) e se chega à:

$$\bar{\mathbf{K}}_2^e = \mathbf{L}\mathbf{H}, \quad \text{com} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{L}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{L}_2 & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (4.4.14)$$

Ao observar a Eq. (4.4.14), fica claro o motivo pelo qual a matriz $\bar{\mathbf{K}}_2^e$ é assimétrica. Segundo Nour-Omid e Rankin [71], a contribuição dessa parcela para a rigidez é praticamente desprezível, principalmente, se a malha estiver bem refinada. Por esse motivo, a matriz $\bar{\mathbf{K}}^e$ é simétrica na prática.

4.5 O Tensor de Projeção

Como foi descrito no Capítulo 3, o operador de projeção ou, simplesmente projetor, tem a finalidade de extrair a parte deformacional dos modos de corpo rígido. Assim, o projetor toma a seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{P}} = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_d}{\partial \mathbf{d}^e} \right] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{11} & \bar{\mathbf{P}}_{12} & \bar{\mathbf{P}}_{13} \\ \bar{\mathbf{P}}_{21} & \bar{\mathbf{P}}_{22} & \bar{\mathbf{P}}_{23} \\ \bar{\mathbf{P}}_{31} & \bar{\mathbf{P}}_{32} & \bar{\mathbf{P}}_{33} \end{bmatrix}_{18 \times 18}, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{P}}_{ij} = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_{d_i}}{\partial \mathbf{d}_j^e} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} & \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^e} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_i}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_i}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^e} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (4.5.1)$$

Os índices nodais variam de 1 a 3, portanto, as derivadas parciais dentro da matriz $\bar{\mathbf{P}}_{ij}$ representam submatrizes 3×3 . A partir da Eq. (4.2.6), obtém-se:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_i = \delta \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C) + \mathbf{T}_R \delta (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{C^0}) \quad (4.5.2)$$

Aplicando a mudança de variável de rotação proposta pela Eq. (4.3.24), tem-se:

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C) + \mathbf{T}_R \delta \left[\mathbf{x}_i + \bar{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (\mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{u}}_k) \right] \quad (4.5.3)$$

e realizando a mudança de coordenadas preditas em (4.2.4), conduz-se à:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{u}}_i &= -\mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_R (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_C) + \mathbf{T}_R \left[\delta \bar{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (\delta \bar{\mathbf{u}}_k) \right] = -\bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{x}_i + \delta \bar{\mathbf{u}}_i - \sum_{k=1}^3 (\delta \bar{\mathbf{u}}_k) \\ &= -\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}_i^C} \delta \bar{\boldsymbol{\omega}} + \delta \bar{\mathbf{u}}_i - \sum_{k=1}^3 (\delta \bar{\mathbf{u}}_k) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

A Eq. (4.5.4) expressa a variação do deslocamento corrotacional e tendo esses valores computados, determina-se a variação do tensor de rotações associado ao deslocamento corrotacional definido por (4.2.9) da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}_{\bar{\theta}_i} = (\delta \mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{T}_R \delta \mathbf{R}_{\theta_i}) \mathbf{T}_0^T \quad (4.5.5)$$

De maneira análoga à Eq. (4.5.3), atribui-se a mudança de variável de rotação apresentada em (4.3.24) o que irá produzir:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\bar{\theta}_i} &= (-\delta \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \mathbf{R}_{\theta_i} + \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \delta \mathbf{R}_{\theta_i}) \mathbf{T}_0^T \\ &= \left(-\delta \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_R + \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \mathbf{T}_R^T \mathbf{T}_R \right) \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0^T \\ &= \left(-\delta \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \mathbf{T}_R^T + \mathbf{T}_R \bar{\mathbf{S}}_{\delta \bar{\omega}} \mathbf{T}_R^T \right) \mathbf{T}_R \mathbf{R}_{\theta_i} \mathbf{T}_0^T \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Rearranjando os termos de (4.5.6) e considerando (4.3.24), após extenso algebrismo chega-se à:

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \bar{\theta}_i^e - \delta \bar{\omega}_i^e \quad (4.5.7)$$

Derivando (4.5.4) e tendo em vista a Eq. (4.5.7), calculam-se todas as derivadas parciais de (4.5.1) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} = \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_k^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} = \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} + \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} + \delta_{ij} \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (4.5.8a)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\theta}_j^e} = \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_k^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} = \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} + \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \quad (4.5.8b)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} = \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} - \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} = -\frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} \quad (4.5.8c)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial \bar{\theta}_j^e} = \frac{\partial \bar{\theta}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} - \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} = \delta_{ij} \mathbf{I} - \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \quad (4.5.8d)$$

Substituindo (4.5.8) em (4.5.1), chega-se à seguinte expressão para as submatrizes $\bar{\mathbf{P}}_{ij}$:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}_{6 \times 6} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 6} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} & \bar{\mathbf{S}}_{x_i^c} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \\ -\frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} & -\frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\theta}_j^e} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (4.5.9)$$

que pode ser re-escrito na forma compacta por:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \delta_{ij} \text{diag}(\mathbf{I}) - \bar{\mathbf{P}}_{u_{ij}} - \bar{\mathbf{P}}_{\omega_{ij}} = \delta_{ij} \text{diag}(\mathbf{I}) - \bar{\mathbf{P}}_{u_{ij}} - \bar{\Psi}_i \bar{\Gamma}_j^T \quad (4.5.10)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{P}}_{u_{ij}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{P}}_{\omega_{ij}} = \boldsymbol{\Psi}_i \boldsymbol{\Gamma}_j \quad (4.5.11)$$

com,

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}_i^C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{6 \times 3} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{u}}_j^e} & \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}_j^e} \end{bmatrix}_{6 \times 3}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\omega}_i^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{d_j}} \end{bmatrix}_{6 \times 3}^T \quad (4.5.12)$$

Com isso, o operador de projeção completo pode ser representado por:

$$\bar{\mathbf{P}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{u_{11}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{12}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{13}} \\ \bar{\mathbf{P}}_{u_{21}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{22}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{23}} \\ \bar{\mathbf{P}}_{u_{31}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{32}} & \bar{\mathbf{P}}_{u_{33}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{\Gamma}_3 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{\Gamma}_3 \\ \boldsymbol{\Psi}_3 \boldsymbol{\Gamma}_1 & \boldsymbol{\Psi}_3 \boldsymbol{\Gamma}_2 & \boldsymbol{\Psi}_3 \boldsymbol{\Gamma}_3 \end{bmatrix} \right)_{18 \times 18} \quad (4.5.13)$$

ou compactamente,

$$\bar{\mathbf{P}} = \text{diag}[\mathbf{I}] - \bar{\mathbf{P}}_u - \bar{\mathbf{P}}_\omega = \text{diag}[\mathbf{I}] - \bar{\mathbf{P}}_u - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Gamma} \quad (4.5.14a)$$

onde:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_2 \\ \boldsymbol{\Psi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}_1^C} \\ \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}_2^C} \\ \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{S}}_{\mathbf{x}_3^C} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}_{18 \times 3} \quad (4.5.14b)$$

e

$$\boldsymbol{\Gamma} = [\boldsymbol{\Gamma}_1 \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 \quad \boldsymbol{\Gamma}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\omega}_1^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{d_1}} & \frac{\partial \bar{\omega}_2^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{d_2}} & \frac{\partial \bar{\omega}_3^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}_{d_3}} \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (4.5.14c)$$

Conforme foi descrito no Capítulo 3, o projetor $\bar{\mathbf{P}}_u$ é associado aos deslocamentos do centroide enquanto que o projetor $\bar{\mathbf{P}}_\omega$ expressa a parte relacionada à rotação de $\bar{\mathbf{P}}$.

Ressalta-se que a matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ depende da geometria atual e da orientação dos eixos locais do elemento e segundo Felippa [32] para o triângulo de 3 nós pode ser obtida a partir de:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{32}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21}^C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{32}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{13}^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2A}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2A}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (4.5.15)$$

em que $x_{ij}^C = x_i^C - x_j^C$ representa a diferença entre as coordenadas de um mesmo nó nas configurações \mathcal{C}^R e \mathcal{C}^D , A e L_3 simbolizam a área e o comprimento entre os nós 1 e 2 do elemento triangular, respectivamente.

4.6 Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

A partir da mudança de variável iterativa de rotação e da invariância do trabalho virtual, defini-se a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema corrotacionado por:

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}}, \quad \text{onde} \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (4.6.1)$$

Como a matriz de rigidez tangente é proveniente da variação de $\bar{\mathbf{f}}$, tem-se:

$$\delta \bar{\mathbf{f}} = \delta \left(\mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{f}}^e \right) = \delta \bar{\mathbf{f}}_1 + \delta \bar{\mathbf{f}}_2 + \delta \bar{\mathbf{f}}_3 \quad (4.6.2a)$$

onde,

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \delta \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (4.6.2b)$$

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{G} \delta \bar{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (4.6.2c)$$

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_3 = \delta \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (4.6.2d)$$

A partir da Eqs. (4.3.5), (4.3.6) e (4.6.1), utiliza-se a regra da cadeia de tal forma que se pode escrever:

$$\delta \tilde{\mathbf{f}}^e = \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}^e}{\partial \bar{\mathbf{d}}} \right] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \bar{\mathbf{d}}_d} \right] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_d}{\partial \mathbf{d}^e} \right] \delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{K}}_R \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^e \quad (4.6.3)$$

Dessa forma,

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{K}}_R \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^e = \mathbf{G} \bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{K}}_{R_1} \delta \mathbf{d}^e \quad (4.6.4)$$

com:

$$\bar{\mathbf{K}}_{R_1} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_1}{\partial \mathbf{d}^e} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e \mathbf{G}^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e = \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{K}}_{R_1} \bar{\mathbf{P}} \quad (4.6.5)$$

Em (4.6.4), $\bar{\mathbf{K}}_R$ que representa a matriz de rigidez tangente local no sistema \mathcal{C}^0 , é transformada em $\bar{\mathbf{K}}_{R_1}$ que, por sua vez, se refere aos nós na configuração deformada \mathcal{C}^D . Salienta-se que ambas matrizes estão no mesmo sistema de eixos (local) e que ao aplicar a Eq. (4.6.5), transforma-se a matriz $\bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e$ para o sistema global de coordenadas.

Para se determinar $\delta \bar{\mathbf{f}}_2$, é necessário conhecer a variação de $\bar{\mathbf{P}}$ definido em (4.5.14a), ou seja:

$$\delta \bar{\mathbf{P}} = \delta \text{diag}[\mathbf{I}] - \delta \bar{\mathbf{P}}_u - \delta \bar{\mathbf{P}}_\omega = - \left(\delta \Psi \Gamma^T + \Psi \delta \Gamma^T \right) \quad (4.6.6)$$

Portanto,

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{G} \left(-\delta \Psi \Gamma^T - \Psi \delta \Gamma^T \right)^T \tilde{\mathbf{f}}^e = - \overbrace{\mathbf{G} \delta \Psi \Gamma^T \tilde{\mathbf{f}}^e}^{\text{1º Termo}} - \overbrace{\mathbf{G} \Psi \delta \Gamma^T \tilde{\mathbf{f}}^e}^{\text{2º Termo}} = -\mathbf{G} \Psi \delta \Gamma^T \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (4.6.7)$$

Observação 4.1. Como nesta tese as configurações corrotacionada e deformada estão próximas entre si, a primeira parcela da Eq. (4.6.7) foi negligenciada [39].

Substituindo a variação de (4.5.14b) em (4.6.7), chega-se à:

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{f}}_2 &= -\mathbf{G}\Gamma \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{\delta \mathbf{x}_i^C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}}_i^e \\ \bar{\mathbf{m}}_i^e \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{G}\Gamma \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_i^e} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i^C \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_i \end{bmatrix} \right) \\ &= -\mathbf{G}\Gamma \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_i^e} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{u}}_i \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}}_i \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{G}\Gamma \sum_{i=1}^3 \left(\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_i^e} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{d}}_d \right)\end{aligned}\quad (4.6.8)$$

que pode ser re-escrito compactamente:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = -\mathbf{G}\Gamma \mathbf{A}^T \delta \bar{\mathbf{d}}_d, \quad \text{com} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_1^e} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_2^e} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_3^e} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (4.6.9)$$

Com isso, substitui-se (4.6.3) em (4.6.9) o que produz:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_2 = -\mathbf{G}\Gamma \mathbf{A}^T \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{d}^e} \right] \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{d}}_d}{\partial \mathbf{d}^e} \right] \delta \mathbf{d}^e = -\mathbf{G}\Gamma \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{K}}_{R_2} \delta \mathbf{d}^e \quad (4.6.10a)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{K}}_{R_2} = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_2}{\partial \mathbf{d}^e} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{K}}_{R_2}^e \mathbf{G}^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{K}}_{R_2}^e = -\Gamma \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} \quad (4.6.10b)$$

De acordo com a Eq. (4.6.2), o último cálculo é o da variação de \mathbf{G} no sistema local de coordenadas que após extenso algebrismo, devidamente detalhado por Nour-Omid e Rankin [71], obtém-se:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_3 = -\mathbf{G} \mathbf{D} \Gamma^T \mathbf{G}^T \delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{K}}_{R_3} \delta \mathbf{d}^e \quad (4.6.11a)$$

com

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_1^e} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{m}}_1^e} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_2^e} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{m}}_2^e} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{n}}_3^e} & \bar{\mathbf{S}}_{\bar{\mathbf{m}}_3^e} \end{bmatrix}_{3 \times 18} \quad (4.6.11b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{R_3} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{K}}_{R_3}^e \mathbf{G}^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{K}}_{R_3}^e = -\mathbf{D} \Gamma^T \quad (4.6.11c)$$

Por fim, agrupam-se as Eqs. (4.6.5), (4.6.10b) e (4.6.11c) para se obter a matriz de rigidez tangente do elemento de casca triangular no sistema global:

$$\mathbf{K}^e = \bar{\mathbf{K}}_{R_1} + \bar{\mathbf{K}}_{R_2} + \bar{\mathbf{K}}_{R_3} = \mathbf{G} \bar{\mathbf{K}}_R^e \mathbf{G}^T \quad (4.6.12a)$$

onde

$$\bar{\mathbf{K}}_R^e = \bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e + \bar{\mathbf{K}}_{R_2}^e + \bar{\mathbf{K}}_{R_3}^e = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{G}^T - \Gamma \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{D} \Gamma^T \quad (4.6.12b)$$

Ao observar a Eq. (4.6.12b) no seu cerne, nota-se que a matriz $\bar{\mathbf{K}}_{R_1}^e$ tem uma parcela de origem constitutiva e outra de natureza geométrica decorrente da mudança de variável

iterativa de rotação. As contribuições de $\bar{\mathbf{K}}_{R_2}^e$ e $\bar{\mathbf{K}}_{R_3}^e$ são exclusivamente geométricas.

Observação 4.2. *A matriz de rigidez tangente do elemento triangular de casca obtido pela formulação EICR não é simétrica, contudo, exemplos numéricos mostrados por Felippa e seus colaboradores [29]–[34] e por Belo et al. [14] apontam que, no equilíbrio de sistemas conservativos, tal matriz fica simétrica permitindo, assim, a implementação computacional.*

Observação 4.3. *Nour-Omid e Rankin [71] cita o benefício de empregar tal procedimento para obtenção da matriz de rigidez tangente do elemento, pois corrige a matriz de rigidez do elemento com relação aos modos de corpo rígido que porventura não tenham sido levados em conta na sua derivação.*

Observação 4.4. *Os projetores $\bar{\mathbf{P}}$ e \mathbf{H} serão explicitados no Apêndice B*

Com isso, este capítulo apresentou a formulação do elemento empregado no desenvolvimento das aplicações numéricas que serão mostradas no Capítulo 6. O intuito foi de particularizar a formulação vista amplamente para qualquer tipo de elemento no Capítulo 3 para o elemento triangular de casca. A seguir, o próximo capítulo irá apresentar o modelo hiperelástico corrotacionado que é a base dos dois elementos formulados neste trabalho.

O Modelo Hiperelástico Corrotacional

5.1 Introdução

A descrição matemática do comportamento de um dado material é caracterizado pela equação constitutiva que relaciona o estado de tensão em função de um histórico de deformação do corpo, conforme foi descrito no **Capítulo 2**. Diferentes relações constitutivas permitem distinguir mecanicamente borrachas e aços, por exemplo. Além disso, as variáveis cinemáticas tais como deformação e tensão foram introduzidas independentemente uma da outra. As equações constitutivas são aquelas relações que conectam variáveis primárias (deslocamentos e rotações) com variáveis secundárias (tensões). Na essência, tais equações representam matematicamente modelos que descrevem o comportamento dos materiais que são validados por meio de resultados experimentais.

Essas relações dependem do material empregado e devem satisfazer certos princípios físicos. Portanto, este capítulo irá contextualizar tais equações para os materiais hiperelásticos, enfatizando o comportamento da pele humana, onde as tensões são derivadas a partir do funcional de energia elástica armazenada. Embora exista um vasto número de descrições materiais, foi escolhido o modelo hiperelástico para ser implementado nesta tese por três motivos: (i) as equações constitutivas são mais simples do que as dos materiais mais complexos tais como elastoplásticos, viscoplásticos ou viscoelásticos; (ii) a formulação corrotacional não foi utilizada para o problema da hiperelasticidade, o que leva à originalidade deste trabalho e (iii) a possibilidade de obter um modelo robusto para descrever o comportamento da pele humana.

Nesse contexto, de acordo com Delalleau *et al.* [25], a pele humana apresenta uma resposta mecânica viscoelástica anisotrópica quase incompressível ou semi-incompressível. As propriedades mecânicas de tecidos vivos são de interesse potencial para a identificação de certas doenças e para se avaliar o efeito pós-trauma. Segundo literatura especializada, a derme é considerada a principal estrutura que contribui para as propriedades mecânicas da

pele, conforme ilustra a Fig. 5.1. Por essa razão, muitos estudos são propostos para analisar o efeito de tal estrutura ao se avaliar o colágeno e a elastina. Entretanto, para descrever um comportamento confiável da pele, todos esses componentes devem ser avaliados simultaneamente.

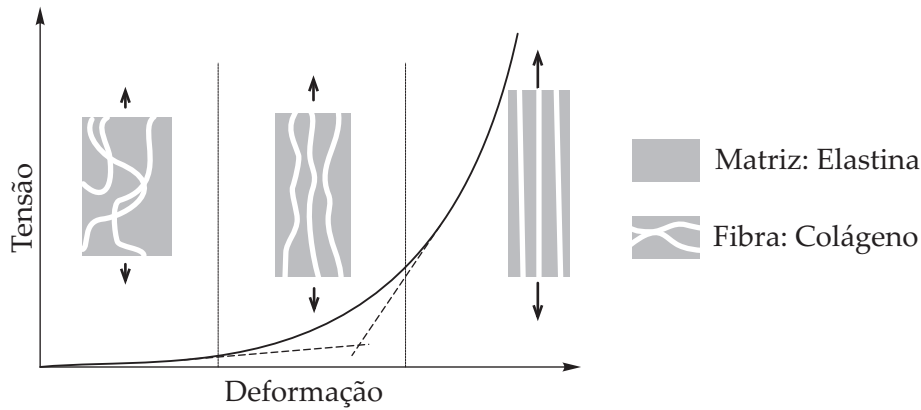


Figura 5.1: Comportamento não-linear entre a relação tensão-deformação da derme.

O principal componente da derme é o colágeno, que é a parte fibrosa da pele e apresenta módulo de Young de 150 a 300 kPa, que segundo Fung [36], pode chegar acima de 1 GPa. Vale destacar que o seu mecanismo de deformação é o principal responsável pelo comportamento da pele. Para pequenas deformações aplicadas à pele, as fibras colágenas são orientadas na direção da tensão. Para grandes deformações, tanto o colágeno quanto a elastina são tensionados, então, o elevado módulo de elasticidade do colágeno modifica a resposta elástica da pele, que se torna mais rígida.

Várias leis mecânicas são propostas para modelar o comportamento de tecidos macios. Diridolou *et al.* [27] assumem que a pele é uma casca com propriedade elástica e pré-tensionada. Segundo Khatyr *et al.* [53], a pele pode ser considerada ortotrópica. Kauer [52] propõem uma formulação neo-Hookena compressível para a propriedade mecânica do útero humano. De acordo com esses estudos, o entedimento do comportamento não-linear da pele é o ponto chave para se compreender o fenômeno de tal mecanismo.

Com o intuito de modelar um meio complexo como a pele, algumas hipóteses são examinadas:

1. A pele é considerada homogênea;
2. Os efeitos inerciais são negligenciados;
3. As componentes anisotrópicas não são consideradas. Essa abordagem consiste na identificação de propriedades hiperelásticas isotrópicas equivalentes da pele.

Como a derme é a principal responsável para descrever o comportamento mecânico da pele, a influência da hipoderme é fundamental para compreender o fenômeno, pois apre-

senta baixa elasticidade o que influencia nos resultados. Essa hipótese é verificada ao se avaliar imagens de ultrassom da pele durante um teste de tração. As imagens mostram que a estrutura subcutânea não afeta na resposta global. Assim, a pele é modelada como um meio de uma única camada e a sua espessura é relacionada com a derme. Desde que $0.45 \leq \nu \leq 0.50$, a pele pode ser modelada com um material hiperelástico semi-incompressível.

5.2 O Potencial de Energia Livre de Helmholtz

Neste trabalho, assume-se que o potencial de energia livre de Helmholtz, Ψ , é uma função convexa da forma:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) \quad (5.2.1)$$

em que \mathbf{F} representa o gradiente de deformação definido no Capítulo 2. A partir do potencial de energia livre é possível derivar as equações de estado. Esse é um potencial termodinâmico que mede o trabalho que foi utilizado em um sistema termodinâmico sob temperatura constante.

Segundo Simo e Hughes [93], todo o processo físico admissível deve satisfazer a desigualdade de Clausius-Duhem, que para um processo isotérmico é dada por:

$$\frac{1}{2}\mathbf{S}\dot{\mathbf{C}} - \rho_0\dot{\Psi} \geq 0 \quad (5.2.2)$$

onde $\dot{\mathbf{C}}$ e $\dot{\Psi}$ representam as derivadas temporais do tensor de Cauchy-Green à direita e do potencial de energia livre, respectivamente. De acordo com a regra da cadeia, pode-se escrever $\dot{\Psi}$ como:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}} \quad (5.2.3)$$

Substituindo (5.2.3) em (5.2.2), obtém-se:

$$\frac{1}{2}\mathbf{S}\dot{\mathbf{C}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (5.2.4)$$

Neste ponto, é importante demonstrar que:

$$\frac{1}{2\rho_0}\mathbf{S}\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}} \quad (5.2.5)$$

De fato,

$$\frac{1}{\rho_0}\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{F}\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} \quad (5.2.6)$$

mas,

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}} = \text{tr}(\mathbf{F}\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}}^T) = \text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F}) = \mathbf{S}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F})^T = \mathbf{S}\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} \quad (5.2.7)$$

Uma vez que $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, tem-se:

$$\mathbf{S}\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} \left\{ \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} \right\}_{\text{Sim}} \quad (5.2.8)$$

em que $\left\{ \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} \right\}_{\text{Sim}}$ simboliza a parte simétrica de $\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}$, cujo valor é dado por:

$$\left\{ \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} \right\}_{\text{Sim}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} \right) \quad (5.2.9)$$

Lembrando que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ e derivando \mathbf{C} em relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}} \quad (5.2.10)$$

Colocando (5.2.10) em (5.2.8) e o resultado disso em (5.2.7), produz:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\mathbf{S}\dot{\mathbf{C}} \quad (5.2.11)$$

Com isso, pode-se substituir (5.2.11) em (5.2.4) o que conduz à:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{P} - \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right) \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (5.2.12)$$

Desde que a desigualdade de Clausius-Duhem possa ser garantida para todo processo admissível, tem-se:

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (5.2.13)$$

Além disso,

$$\mathbf{P} = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma \mathbf{F}^{-T} \quad (5.2.14)$$

o que resulta em:

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sigma \mathbf{F}^{-T} = \rho_0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (5.2.15)$$

portanto,

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (5.2.16)$$

5.2.1 Função Energia de Deformação

Neste ponto, é conveniente introduzir a relação entre o potencial de energia livre e a energia de deformação definido por:

$$W(\mathbf{F}) = \rho_0 \Psi(\mathbf{F}) \quad (5.2.17)$$

Então, pode-se re-escrever (5.2.16) da seguinte maneira:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \quad (5.2.18)$$

É importante perceber que $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ é a densidade do sólido na configuração inicial, portanto, não é uma função do gradiente de deformação \mathbf{F} . Embora $\rho_0(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X}, t)\rho(\mathbf{X}, t)$, conseqüentemente, ρ é uma função de \mathbf{F} . Desde que o tensor de tensões de Cauchy seja simétrico, pode-se dizer que:

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \right]^T \quad (5.2.19)$$

Observação 5.1. O potencial W está submetido à duas condições físicas gerais que impõem restrições na forma de W . Essas considerações físicas são dadas por: (i) Princípio da indiferença do sistema coordenado e (ii) condições de simetria do material.

5.3 Princípio da Indiferença de Sistema Coordenado

Como esta tese irá tratar somente de processos isotérmicos, por conviniência, denota-se a relação constitutiva uma função do gradiente de deformação, ou seja, $\sigma = \mathcal{G}(\mathbf{F})$. Considere o movimento entre dois observadores, conforme foi introduzido na seção 2.3.7. Esse movimento relativo pode ser expresso como:

- Uma translação pura:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}(t) \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{d}(t) \quad (5.3.1)$$

onde $\mathbf{d}(t)$ simboliza a translação de corpo rígido entre dois observadores. Como $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$, pode-se escrever

$$\hat{\mathbf{x}} = \phi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{d}(t) \quad (5.3.2)$$

- Uma rotação pura:

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{Q}(t)] \mathbf{x} \quad (5.3.3)$$

que é

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{Q}(t)] \phi_t(\mathbf{X}) \quad (5.3.4)$$

em que $[\mathbf{Q}(t)]$ é a matriz de rotação de corpo rígido entre dois observadores.

- A combinação de ambas, translação e rotação. Seja $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ o movimento de deformação genérico de um corpo, considere um segundo movimento de deformação $\mathbf{x}^* = \phi^*(\mathbf{X}, t)$ que difere do primeiro pelo movimento de corpo rígido, ou seja, pelo

movimento relativo entre dois observadores diferentes. Então,

$$\mathbf{x}^* = [\mathbf{Q}(t)] \{ \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{d}(t) \} \quad (5.3.5)$$

ou equivalentemente,

$$\phi^*(\mathbf{X}, t) = [\mathbf{Q}(t)] \{ \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{d}(t) \} \quad (5.3.6)$$

O gradiente de deformação para os dois movimentos estão relacionados por:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{Q}(t)] \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{QF} \quad (5.3.7)$$

Utilizando o teorema da decomposição polar visto na seção 2.3.4, tem-se:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{R}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{QRU} \quad (5.3.8)$$

que pela unicidade da decomposição resulta em:

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{QR} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \quad (5.3.9)$$

Se ϕ e ϕ^* representam o mesmo movimento avaliado por dois observadores diferentes, então:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad \text{e} \quad d\mathbf{x}^* = \mathbf{F}^*d\mathbf{X} = \mathbf{QF}d\mathbf{X} \quad (5.3.10)$$

Portanto, $d\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{x}$. Agora, considere os elementos de área $\mathbf{n}dA$ e \mathbf{n}^*dA^* definidos em Ω e Ω^* , respectivamente. Através da relação de Nanson, apresentada inicialmente na seção 2.3.6, obtém-se:

$$\mathbf{n}dA = J\mathbf{F}^{-T} \{ \mathbf{n}_0 dA_0 \} \quad \text{e} \quad \mathbf{n}^*dA^* = J^* (\mathbf{F}^*)^{-T} \{ \mathbf{n}_0 dA_0 \} \quad (5.3.11)$$

Não obstante,

$$J^* = \det(\mathbf{F}^*) = \det(\mathbf{QF}) = \det(\mathbf{Q}) \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \quad (5.3.12)$$

o que leva à

$$J^* = J \quad (5.3.13)$$

Além disso,

$$\mathbf{n}_0 dA_0 = \frac{1}{J^*} (\mathbf{F}^*)^T \{ \mathbf{n}^* dA^* \} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^T \{ \mathbf{n} dA \} \quad (5.3.14)$$

isto é,

$$(\mathbf{QF})^T \{ \mathbf{n}^* dA^* \} = \mathbf{F}^T \{ \mathbf{n} dA \} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \{ \mathbf{n}^* dA^* \} = \mathbf{F}^T \{ \mathbf{n} dA \} \quad (5.3.15)$$

Pós-multiplicando-se ambos os lados por \mathbf{F}^T , resulta em:

$$\mathbf{Q}^T \{ \mathbf{n}^* dA^* \} = \mathbf{n} dA \quad \text{ou} \quad \mathbf{n}^* dA^* = \mathbf{Q} \{ \mathbf{n} dA \} \quad (5.3.16)$$

mas,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}^* dA^*, \mathbf{n}^* dA^* \rangle &= \langle \mathbf{Q} \{ \mathbf{n} dA \}, \mathbf{Q} \{ \mathbf{n} dA \} \rangle \\ &= \langle \mathbf{n} dA, \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \{ \mathbf{n} dA \} \rangle \\ &= \langle \mathbf{n} dA, \mathbf{n} dA \rangle \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Por definição, $dA \geq 0$ e $\|\mathbf{n}^*\| = \|\mathbf{n}\| = 1$, logo $dA^* = dA$ e $\mathbf{n}^* = \mathbf{Q}\mathbf{n}$. Conclui-se que o movimento de corpo rígido preserva a área do elemento de superfície, como era de se esperar.

O axioma da indiferença do sistema de coordenadas assume que se \mathbf{t}^* e \mathbf{t} caracterizam trações de superfície prescritas, consideradas condições de contorno naturais, então:

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{Q}\mathbf{t} \quad \text{com} \quad \mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}^* = \sigma^* \mathbf{n}^* \quad (5.3.18)$$

Por essa razão, como resultado desse axioma, obtém-se:

$$\sigma^* \mathbf{n}^* = \mathbf{Q}\sigma \mathbf{n} \quad \text{ou} \quad \sigma^* \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{Q}\sigma \mathbf{n} \quad (5.3.19)$$

o que acarreta em,

$$\mathbf{Q}^T \sigma^* \mathbf{Q}\mathbf{n} = \sigma \mathbf{n} \quad (5.3.20)$$

que deve ser assegurado para qualquer $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Dessa forma,

$$\sigma = \mathbf{Q}^T \sigma^* \mathbf{Q} \quad \text{ou} \quad \sigma^* = \mathbf{Q}\sigma \mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^+ \quad (5.3.21)$$

em que $\mathbb{O}^+ = \{ \mathbf{Q} \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \text{ e } \det(\mathbf{Q}) = 1 \}$. Nesta tese, \mathbf{Q} deve ser arbitrário desde que o princípio da indiferença do sistema coordenado esteja garantido para todos os observadores, ou seja, para todo o movimento de corpo rígido representando todas as possíveis diferenças de observador.

Análogo à $\sigma = \mathcal{G}(\mathbf{F})$, para o movimento $\phi^*(\mathbf{X}, t)$, tem-se que $\sigma^* = \mathcal{G}(\mathbf{F}^*)$. Introduzindo essas relações em (5.3.21), obtém-se a restrição para a forma funcional de $\mathcal{G}(\cdot)$ dado por:

$$\mathcal{G}(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = \mathbf{Q}\mathcal{G}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{O}^+ \quad (5.3.22)$$

Observação 5.2. A hipótese implícita no princípio da indiferença do sistema coordenado assume que a equação constitutiva que relaciona o estado de tensão com a deformação local de um sólido não depende do observador.

Isso significa que a mudança de observador pode afetar somente a orientação das componentes de tensão, mas não sua independência com relação à deformação local. Essa hipótese tem como consequência uma imposição da forma de se representar $\mathcal{G}(\cdot)$ dado pela Eq. (5.3.22).

A seguir, considere-se a função de deformação W . O axioma da indiferença de sistema coordenado postula que:

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}^*) \quad \text{ou} \quad W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{QF}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}^+ \quad (5.3.23)$$

Novamente, por meio do teorema da decomposição polar, tem-se:

$$W(\mathbf{RU}) = W(\mathbf{QRU}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O}^+ \quad (5.3.24)$$

Agora, se (5.3.24) é assegurado para cada $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}^+$, deve-se garantir para o caso particular em que $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Por isso, $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{U})$ e pela consideração de diferentes funções de composição, chega-se à:

$$W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{U}^2) = \tilde{W}(\mathbf{C}) \quad (5.3.25)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\mathbf{C}^*) &= \tilde{W}([\mathbf{F}^*]^T \mathbf{F}^*) = \tilde{W}([\mathbf{QF}]^T \mathbf{QF}) \\ &= \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{QF}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Este resultado mostra que a função $\tilde{W}(\mathbf{C})$ para a função densidade de energia de deformação automaticamente satisfaz a restrição dada por (5.3.24). Com isso, o princípio da indiferença do sistema coordenado é satisfeito.

Substituindo (5.3.25) em (5.2.18), produz:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{G}(\mathbf{F}) = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (5.3.27a)$$

que pode ser re-escrito na forma indicial como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \frac{\partial C_{ab}}{\partial F_{ir}} F_{jr} \quad (5.3.27b)$$

Como,

$$\frac{\partial C_{ab}}{\partial F_{ir}} = \frac{\partial}{\partial F_{ir}} \{F_{ia} F_{ib}\} = \frac{\partial F_{ia}}{\partial F_{ir}} F_{ib} + \frac{\partial F_{ib}}{\partial F_{ir}} F_{ia} = \delta_{li} \delta_{ar} F_{lb} + \delta_{li} \delta_{br} F_{la} = \delta_{ar} F_{ib} + \delta_{br} F_{ia} \quad (5.3.28)$$

Comparando as Eqs. (5.3.27b) e (5.3.28), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} (\delta_{ar} F_{ib} + \delta_{br} F_{ia}) F_{jr} \\
 &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} F_{ib} F_{ja} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} F_{ia} F_{jb} \\
 &= \frac{\rho}{\rho_0} F_{ib} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ba}} \right\}^T F_{ja} + \frac{\rho}{\rho_0} F_{ia} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \right\} F_{jb} \\
 &= \frac{\rho}{\rho_0} F_{ia} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \right\}^T F_{jb} + \frac{\rho}{\rho_0} F_{ia} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \right\} F_{jb} \\
 &= \frac{\rho}{\rho_0} F_{ia} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \right)^T + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial C_{ab}} \right\} F_{jb}
 \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

que pode ser compactado da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \right\} \mathbf{F}^T \tag{5.3.30}$$

Como o tensor de Green à direita é simétrico, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, então:

$$\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \tag{5.3.31}$$

o que conduz à,

$$\sigma = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \tag{5.3.32}$$

Aplicando as relações entre PK1, PK2 e o tensor de tensões de Cauchy sumarizados na Tab. 2.2, obtém-se os seguintes valores para o primeiro e segundo tensor de Piola-Kichhoff, respectivamente:

$$\mathbf{P} = J \sigma \mathbf{F}^{-T} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T} = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} \tag{5.3.33}$$

Observação 5.3. *Existem outros métodos alternativos para a determinação das relações constitutivas que automaticamente satisfazem o princípio da indiferença de sistema coordenado que são capazes de conter informações adicionais. Entretanto, o método apresentado neste trabalho é considerado satisfatório, pois apresenta as equações de forma robusta e consistente.*

5.4 Simetria Material

O conceito de simetria material é proveniente do fato que o material possui algum tipo de microestrutura tal como a estrutura cristalina. Quando os parâmetros elásticos em

um ponto têm os mesmos valores para cada par de sistemas coordenados que são espelhados entre si em um certo plano, esse plano é chamado de *plano de simetria material* (a simetria da estrutura interna apresentada pela forma cristalográfica, arranjo das fibras regulares ou moléculas, por exemplo). A Fig. 5.2 mostra um plano de simetria na origem do sistema de coordenadas que não é alterado com a inversão do eixo perpendicular ao plano de simetria xy .

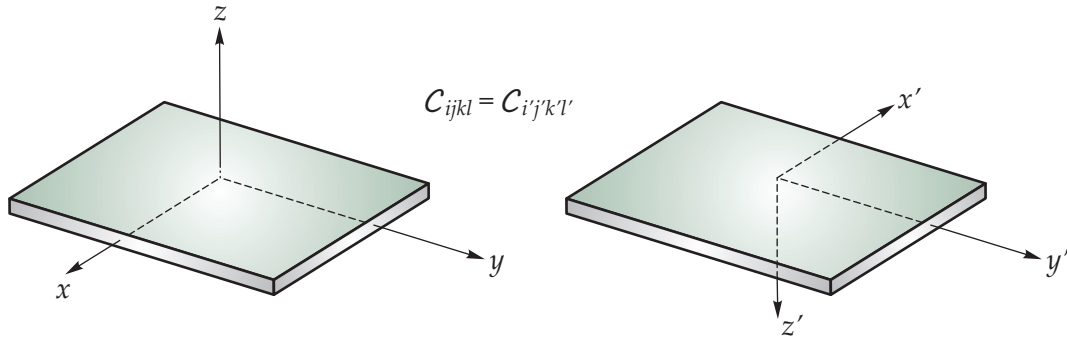


Figura 5.2: Plano de simetria formado pelos eixos x e y .

É importante observar que a simetria descrita é uma propriedade direcional e não uma propriedade de posição. Com isso, um material pode ter certas simetrias elásticas para cada ponto do material e as propriedades podem variar ponto a ponto. A dependência da posição das propriedades materiais é chamada *não-homogeneidade material*. Este trabalho tem como finalidade encontrar restrições de forma nas funções de resposta $\mathcal{G}(\cdot)$, $\mathcal{H}(\cdot)$ ou $\tilde{W}(\cdot)$, empregando o conceito de simetria. Note-se que:

$$\sigma = \mathcal{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \mathcal{H}(\mathbf{C}) \mathbf{F}^T, \quad \text{com} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \quad (5.4.1)$$

ou

$$\sigma = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T, \quad \text{onde} \quad J = \det(\mathbf{F}) = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (5.4.2)$$

Relembrando que o movimento $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ dá as coordenadas \mathbf{x} no tempo t de uma partícula P em termos de suas coordenadas \mathbf{X} dadas em uma configuração de referência. Vale destacar que a tendência é de colocar como configuração de referência aquela em que o material está em seu estado inicial. Entretanto, diferentes configurações de referência podem ser empregadas, tal como uma configuração de referência intermediária com uma distribuição de tensões conhecida.

Sejam Ω_1 e Ω_2 duas configurações de referência possíveis e \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 as posições da partícula P nas configurações Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Ademais, considere-se:

$$\mathbf{X}_2 = \mathcal{H}(\mathbf{X}_1) \quad (5.4.3)$$

a relação entre as posições ocupadas por P em Ω_1 e Ω_2 . Considere-se agora uma função de deformação da configuração de referência Ω_1 para outra atual:

$$\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}_1; \Omega_1) \quad (5.4.4)$$

Denotando, $\phi_t^{(1)}(\mathbf{X}_1) \equiv \phi_t(\mathbf{X}_1; \Omega_1)$, pode-se escrever $\mathbf{x} = \phi_t^{(1)}(\mathbf{X}_1)$. Essa mesma função de deformação pode ser vista como uma deformação da configuração de referência Ω_1 para uma configuração intermediária Ω_2 seguida por uma deformação de Ω_2 para a configuração atual do sólido, com isso:

$$\mathbf{x} = \phi_t^{(1)}(\mathbf{X}_1) = \phi_t^{(2)}(\mathbf{X}_2) \circ \mathcal{H}(\mathbf{X}_1) = \phi_t^{(2)}[\mathcal{H}(\mathbf{X}_1)] \quad (5.4.5)$$

Aqui, $\mathbf{X}_2 = \mathcal{H}(\mathbf{X}_1)$ que define $\phi_t^{(2)}(\mathbf{X}_2) \equiv \phi_t(\mathbf{X}_2; \Omega_2)$. O gradiente de deformação pode então ser obtido a partir de:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial \phi_t^{(1)}(\mathbf{X}_1)}{\partial \mathbf{X}_1} \quad (5.4.6)$$

que relaciona a forma da vizinhança de P na configuração de referência Ω_1 para sua vizinhança na configuração atual. Similarmente, a deformação:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\partial \phi_t^{(2)}(\mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_2} \quad (5.4.7)$$

relaciona a forma da vizinhança de P na configuração de referência Ω_2 para sua vizinhança na configuração atual. Desde que:

$$\phi_t^{(1)}(\mathbf{X}_1) = \phi_t^{(2)}[\mathcal{H}(\mathbf{X}_1)] \quad (5.4.8)$$

pode-se obter a partir da regra da cadeia que

$$\frac{\partial \phi_t^{(1)}}{\partial \mathbf{X}_1} = \frac{\partial \phi_t^{(2)}}{\partial \mathbf{X}_2} \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \mathbf{X}_1} \quad (5.4.9)$$

Aplicando (5.4.3), chega-se à:

$$\frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \mathbf{X}_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}_1} \quad (5.4.10)$$

e denotando $\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}_1}$, pode-se finalmente escrever que $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \mathbf{Q}$.

Observe-se que a equação constitutiva $\mathcal{G}(\mathbf{F})$ ou a energia de deformação $\tilde{W}(\mathbf{C})$ são determinadas pelo gradiente de deformação \mathbf{F} que compara as formas das vizinhanças de P nas configurações atual e de referência. Portanto, $\mathcal{G}(\mathbf{F})$ ou $\tilde{W}(\mathbf{C})$ podem também depender em qual configuração de referência a comparação está sendo feita.

Assim, considere-se um movimento simples de uma configuração de referência Ω_1 para outra atual. Seja $\mathcal{J}(\mathbf{F}_1; \Omega_1)$ a função de resposta associada com a configuração de referência Ω_1 . Desde que essa mesma deformação possa ser vista como a composição de uma deformação da configuração de referência Ω_1 para uma configuração intermediária Ω_2 seguida por uma deformação de Ω_2 para a configuração atual do corpo, tem-se:

$$\sigma = \mathcal{J}(\mathbf{F}_1; \Omega_1) = \mathcal{J}(\mathbf{F}_2 \mathbf{Q}; \Omega_1) \quad (5.4.11)$$

e

$$\tilde{W}(\mathbf{C}_1; \Omega_1) = \tilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{Q}; \Omega_1), \quad \text{com } \mathbf{C}_1 = \mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{F}_2^T \mathbf{F}_2 \quad (5.4.12)$$

Definição: Seja ϕ_1 e ϕ_2 funções de deformação de tal forma que:

$$\phi_1 : \mathbf{X} \in \Omega_1 \rightarrow \Omega \quad \text{e} \quad \phi_2 : \mathbf{X} \in \Omega_1 \rightarrow \Omega$$

Comparando as duas funções, pode-se concluir que $\phi_1 = \phi_2$ se

$$\phi_1(\mathbf{X}) = \phi_2(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_1 \quad (5.4.13)$$

que, nitidamente, $\phi_1(\mathbf{X})$ e $\phi_2(\mathbf{X})$ representam a mesma função deformação.

Quando o gradiente de deformação é aplicado à configuração de referência e atual, a tensão é dada por $\sigma_1 = \mathcal{J}(\mathbf{F}; \Omega_1)$ e $\sigma_2 = \mathcal{J}(\mathbf{FQ}; \Omega_1)$, respectivamente. Assim, fica evidenciado que, embora o movimento seja o mesmo, a tensão não é, pois $\sigma_1 \neq \sigma_2$. O problema agora é definir sob quais condições $\sigma_1 = \sigma_2$.

5.4.1 Grupos de Simetria

Quando duas configurações de referência têm a mesma microestrutura e, portanto, a mesma resposta mecânica, em tal situação, diz-se que o material possui o mesmo *grupo de simetria*.

Por esse motivo, se Ω_1 e Ω_2 são configurações de referência equivalentes, então tem-se:

$$\mathcal{J}(\mathbf{F}; \Omega_1) = \mathcal{J}(\mathbf{FQ}; \Omega_1) \quad \text{e} \quad \tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}; \Omega_1), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{G} \quad (5.4.14)$$

em que $\forall \mathbf{Q} \in \mathbb{G}$ significa que a expressão deve ser considerada para cada \mathbf{Q} que relaciona as configurações de referência.

Com o intuito de impor a condição de simetria dada por (5.4.14), é necessário especificar todas as configurações de referência Ω que são equivalentes à Ω_1 . Para materiais sólidos, \mathbf{Q} pode ser uma rotação, se $\det(\mathbf{Q}) = 1$ ou pode ser uma reflexão, se $\det(\mathbf{Q}) = -1$.

5.4.2 Consequências da Simetria Material

Por simplicidade, o modelo hiperelástico da pele é considerado isotrópico. Para materiais com tal comportamento, as expressões descritas devem ser consideradas para todas as matrizes $\mathbf{Q} \in \mathbf{O}^+$, cujo valor já foi descrito como: $\mathbf{O}^+ = \{\mathbf{Q} \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \text{ e } \det(\mathbf{Q}) = \pm 1\}$

Lembrando que o tensor \mathbf{C} pode ser expresso como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda}_\mathbf{C} \mathbf{Z}^T, \quad \text{com} \quad \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T = \mathbf{I}, \quad \det(\mathbf{Z}) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{\Lambda}_\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^C & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^C & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^C \end{bmatrix} \quad (5.4.15)$$

em que λ_i^C são os valores principais de \mathbf{C} e

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1^C \quad \mathbf{z}_2^C \quad \mathbf{z}_3^C\} \quad (5.4.16)$$

onde \mathbf{z}_i^C são os autovetores associados ao tensor de Green à direita \mathbf{C} .

Desde que seja utilizado um material isotrópico:

$$\tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}; \Omega_1), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{O} \quad (5.4.17)$$

isso também deve ser verdadeiro para o caso particular em que $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}$ e, como consequência disso, $\tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(\lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C; \Omega_1)$.

Considerando o caso particular para \mathbf{Q} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C; \Omega_1) & \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_2^C, \lambda_3^C, \lambda_1^C; \Omega_1) & \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_3^C, \lambda_1^C, \lambda_2^C; \Omega_1) \\ \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_1^C, \lambda_3^C, \lambda_2^C; \Omega_1) & \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_2^C, \lambda_1^C, \lambda_3^C; \Omega_1) & \tilde{W} &= \tilde{W}(\lambda_3^C, \lambda_2^C, \lambda_1^C; \Omega_1) \end{aligned}$$

Consequentemente, chega-se à:

$$\tilde{W} = \tilde{W}(\lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C; \Omega_1) \quad (5.4.18)$$

e \tilde{W} não depende da ordem de $(\lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C)$, isto é, não é sensível a permutação de $(\lambda_1^C, \lambda_2^C, \lambda_3^C)$, então, tal \tilde{W} assegura a condição de isotropia automaticamente. Pode ser provado que existe uma correspondência única entre três números (I_C, II_C, III_C) , definido como:

$$I_C = \lambda_1^C + \lambda_2^C + \lambda_3^C \quad (5.4.19a)$$

$$II_C = \lambda_1^C \lambda_2^C + \lambda_2^C \lambda_3^C + \lambda_1^C \lambda_3^C \quad (5.4.19b)$$

$$III_C = \lambda_1^C \lambda_2^C \lambda_3^C \quad (5.4.19c)$$

Nessas condições, a energia de deformação definida em (5.4.14) pode ser em função

de (5.4.19), ou seja, $\tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}; \Omega_1)$, que também satisfaz a condição de isotropia.

Os números $(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}})$ são chamados de *invariantes* de \mathbf{C} e podem ser também definidos por

$$I_{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 C_{ii} = C_{11} + C_{22} + C_{33} = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (5.4.20a)$$

$$II_{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 C_{ii}^2 = C_{11}^2 + C_{22}^2 + C_{33}^2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \quad (5.4.20b)$$

$$III_{\mathbf{C}} = \prod_{i=1}^3 C_{ii} = C_{11}C_{22}C_{33} = \det(\mathbf{C}) \quad (5.4.20c)$$

Eles são chamados de invariantes de \mathbf{C} pelo fato de que:

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{C}) = \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}) \\ [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] = [\text{tr}(\hat{\mathbf{C}})^2 - \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}^2)] \\ \det(\mathbf{C}) = \det(\hat{\mathbf{C}}) \end{cases}$$

para qualquer $\hat{\mathbf{C}}$ tal que $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}$, $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}$. Isso significa que $I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}$ são invariantes com relação a qualquer mudança de sistema de coordenadas, ou seja, para qualquer escolha de $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}$.

Aplicando o conceito de que a energia de deformação pode ser escrita em termos dos invariantes, a Eq. (5.4.2) pode ser re-escrita após regra da cadeia como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \right\} \mathbf{F}^T \quad (5.4.21a)$$

ou em termos das componentes,

$$\sigma_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} F_{ir} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_{\mathbf{C}}} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} \right\} F_{ja} \quad (5.4.21b)$$

Com isso, o problema agora é determinar as derivadas parciais dos invariantes para se obter o estado de tensão no sólido. Inicialmente,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} = \frac{\partial C_{pp}}{\partial C_{ra}} = \delta_{pr} \delta_{pa} = \delta_{ra} \quad (5.4.22)$$

e

$$\frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial C_{ra}} \{ I_{\mathbf{C}}^2 - C_{pq} C_{pq} \} = I_{\mathbf{C}} \delta_{ra} - \delta_{pr} \delta_{qa} C_{pq} = I_{\mathbf{C}} \delta_{ra} - C_{ar} \quad (5.4.23)$$

A determinação de $\frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}}$ pode ser obtida utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, o qual declara que:

$$\mathbf{C}^3 - I_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^2 + II_{\mathbf{C}}\mathbf{C} - III_{\mathbf{C}}\mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad C_{ip}C_{pq}C_{qj} - I_{\mathbf{C}}C_{ip}C_{pj} + II_{\mathbf{C}}C_{ij} - III_{\mathbf{C}}\delta_{ij} = 0 \quad (5.4.24)$$

Determinando o traço da Eq. (5.4.24), obtém-se:

$$C_{ip}C_{pq}C_{qi} - I_{\mathbf{C}}C_{ip}C_{pi} + II_{\mathbf{C}}C_{ii} - 3III_{\mathbf{C}} = 0 \quad (5.4.25)$$

Além disso, pode-se escrever a Eq. (5.4.20b) de maneira alternativa como:

$$II_{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \{ I_{\mathbf{C}}^2 - C_{pq}C_{pq} \} \quad (5.4.26)$$

o que implica em,

$$-C_{pq}C_{pq} = 2II_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}^2 \quad (5.4.27)$$

Com isso, a Eq. (5.4.25) pode ser calculada, isolando $III_{\mathbf{C}}$, da seguinte maneira:

$$III_{\mathbf{C}} = \frac{1}{3}C_{ip}C_{pq}C_{qi} + I_{\mathbf{C}}II_{\mathbf{C}} - \frac{1}{3}I_{\mathbf{C}}^3 \quad (5.4.28)$$

Como resultado, chega-se à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} &= \frac{\partial}{\partial C_{ra}} \left\{ \frac{1}{3}C_{ip}C_{pq}C_{qi} + I_{\mathbf{C}}II_{\mathbf{C}} - \frac{1}{3}I_{\mathbf{C}}^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial C_{ip}}{\partial C_{ra}}C_{pq}C_{qi} + C_{ip}\frac{\partial C_{pq}}{\partial C_{ra}}C_{qi} + C_{ip}C_{pq}\frac{\partial C_{qi}}{\partial C_{ra}} \right\} + \frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}}II_{\mathbf{C}} + I_{\mathbf{C}}\frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} - I_{\mathbf{C}}^2\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} \\ &= \frac{1}{3} \{ \delta_{ir}\delta_{pa}C_{pq}C_{qi} + C_{ip}\delta_{pr}\delta_{qa}C_{qi} + C_{ip}C_{pq}\delta_{qr}\delta_{ia} \} + \delta_{ra}II_{\mathbf{C}} + I_{\mathbf{C}} \{ I_{\mathbf{C}}\delta_{ra} - C_{ar} \} - I_{\mathbf{C}}^2\delta_{ra} \\ &= \frac{1}{3} \{ C_{aq}C_{qr} + C_{ir}C_{ai} + C_{ap}C_{pr} \} + \delta_{ra}II_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}C_{ar} \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Lembrando que o tensor de Green à direita é simétrico, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ra}} &= \frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial C_{ar}} \\ &= \frac{1}{3} \{ C_{aq}C_{qr} + C_{ai}C_{ir} + C_{ap}C_{pr} \} + \delta_{ra}II_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}C_{ar} \\ &= \frac{1}{3} \{ C_{aq}C_{qr} + C_{aq}C_{qr} + C_{aq}C_{qr} \} + \delta_{ra}II_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}C_{ar} \\ &= C_{aq}C_{qr} + \delta_{ra}II_{\mathbf{C}} - I_{\mathbf{C}}C_{ar} \\ &= C_{rp}C_{pa} - I_{\mathbf{C}}C_{ra} + II_{\mathbf{C}}\delta_{ra} \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

Substituindo as Eqs. (5.4.22), (5.4.23) e (5.4.30) em (5.4.21b), tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} \delta_{ra} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} (I_C \delta_{ra} - C_{ra}) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} (C_{rp} C_{pa} - I_C C_{ra} + II_C \delta_{ra}) \right\} F_{ir} F_{ja} \quad (5.4.31)$$

que depois de rearranjar os termos fica:

$$\sigma_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + II_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) \delta_{ra} - \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) C_{ra} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} C_{rp} C_{pa} \right\} F_{ir} F_{ja} \quad (5.4.32)$$

A Eq. (5.4.32) pode ser colocada na forma compacta, de tal maneira que:

$$\sigma = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + II_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) \mathbf{C} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \mathbf{C}^2 \right\} \mathbf{F}^T \quad (5.4.33)$$

Como o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é dado por $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T}$, pode-se expressar o PK2 em termos de (5.4.33), o que resulta em:

$$\mathbf{S} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + II_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \right) \mathbf{C} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} \mathbf{C}^2 \right\} \quad (5.4.34)$$

Observação 5.4. Ao utilizar (5.4.34), a caracterização completa de um material hiperelástico foi feita e a condição $\tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(I_C, II_C, III_C; \Omega_1)$ foi obedecida.

5.5 Restrições Materiais

5.5.1 Incompressibilidade

Em um material incompressível, o volume não varia durante o processo de deformação e a densidade permanece constante. O movimento de um material incompressível é chamado de *isocórico*. No movimento isocórico, as seguintes condições são válidas:

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad \text{e} \quad \text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (5.5.1)$$

A primeira expressão é em termos da deformação total e a segunda é uma forma de taxa da restrição isocórica. Segundo Belytschko *et al.* [16], para situações com passo de incremento muito grande, a primeira é mais acurada.

Como consequência de (5.5.1), $III_C = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = J^2 = 1$, isso implica que:

$$III_C = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_C} = 0 \quad (5.5.2)$$

Ao avaliar as tensões de materiais incompressíveis, é conveniente separar as medidas de tensão como a soma de uma parte deviatória e outra volumétrica (hidrostática). Esse procedimento é chamado de *parte esférica de um tensor*. Assim, o tensor de tensões de Cauchy e o PK2 podem ser decompostos, respectivamente, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}} = -p\mathbf{I} \quad (5.5.3a)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\text{dev}} + \mathbf{S}^{\text{vol}}, \quad \mathbf{S}^{\text{vol}} = \frac{1}{3}(\mathbf{S} : \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \quad (5.5.3b)$$

em que p , por representar a parte volumétrica do tensor, é chamado de *pressão hidrostática* e é dado por $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$.

Observação 5.5. Note que a parte hidrostática da tensão não é determinada a partir da equação de estado, pois não é uma função da deformação \mathbf{F} . Sua determinação é obtida por meio da equação de equilíbrio e das condições de contorno naturais prescritas.

Considerando as Eqs. (5.5.1), (5.5.2) e (5.5.3) para se avaliar (5.4.34), e lembrando que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, então:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} (p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}) \mathbf{F}^{-T} \\ &= p\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} \mathbf{F}^{-T} \\ &= p\mathbf{C}^{-1} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} \mathbf{C} \right\} \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

ou seja,

$$\mathbf{S} = p\mathbf{C}^{-1} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_C} + I_C \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_C} \mathbf{C} \right\} \quad (5.5.5)$$

é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff para materiais hiperelásticos incompressíveis.

5.5.2 Semi-incompressibilidade

Para muitos materiais hiperelásticos, tais como a borracha, a deformação volumétrica é bastante pequena, mesmo em estados altamente deformados. Por essa razão, alguns modelos hiperelásticos são assumidos como perfeitamente incompressíveis. O tratamento numérico desses modelos não é trivial, exceto para o estado plano de tensões. Ademais, no contexto das soluções via MEF, o uso de técnicas mistas é requerido, pois além dos deslocamentos, a pressão hidrostática deve ser considerada como variável.

O problema, então, pode ser tratado no contexto dos elementos finitos baseados em deslocamentos introduzindo compressibilidade em modelos originalmente incompressíveis. Essa regularização da compressão, descritas nos modelos materiais de Mooney-Rivlin, neo-

Hookeano e Ogden, permitem a modelagem do comportamento material chamado de *semi-incompressível*. Com essa abordagem, o modelo hiperelástico proposto capaz de representar a deformação da pele humana pode ser desenvolvido.

Observação 5.6. *Deve-se ter em mente que o comportamento real dos materiais nunca é perfeitamente incompressível e que ao se introduzir compressibilidade no modelo, permite-se uma extensão das teorias originais que tratam materiais onde a compressibilidade não pode ser desconsiderada.*

1. Material Mooney-Rivlin

Esse modelo é baseado na teoria inicialmente por Rivlin e Sanders para deformações moderadamente grandes de borracha que, posteriormente, Mooney e Rivlin validaram com os resultados experimentais. É um modelo matematicamente simples, neste caso:

$$\tilde{W}(I_1, I_2) = \rho_0 \Psi(I_1, I_2) = K_1(I_1 - 3) + K_2(I_2 - 3) \quad (5.5.6a)$$

em que

$$I_1 = I_C \quad \text{e} \quad I_2 = II_C \quad (5.5.6b)$$

sendo K_1 e K_2 constantes materiais a serem identificadas. Note que \tilde{W} é definido, portanto, quando $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ não ocorre deformação e chega-se à $\tilde{W} = 0$. De fato, para $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, deriva-se:

$$I_1 = 3 \quad \text{e} \quad I_2 = 3 \quad (5.5.7)$$

2. Material Neo-Hookeano

O modelo material neo-Hookeano é uma extensão da lei de Hooke generalizada isotrópica para as grandes deformações. Neste modelo, $\tilde{W}(I_1) = \rho_0 \Psi(I_1) = K_1(I_1 - 3)$. Tanto no modelo neo-Hookeano quanto no Mooney-Rivlin a análise pode ser feita sob diferentes abordagens.

Compressível Regularizado

Para se obter as equações, é necessário separar a deformação em duas partes, volumétrica e deviatórica, de alguns tensores, análogo ao que foi feito no tópico anterior para Eq. (5.5.3).

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{vol}} \cdot \mathbf{F}^{\text{dev}}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{F}^{\text{vol}} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^{\text{dev}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (5.5.8)$$

A partir da decomposição da Eq. (5.5.8), pode-se definir:

$$\mathbf{C}^{\text{dev}} = (\mathbf{F}^{\text{dev}})^T \mathbf{F}^{\text{dev}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (5.5.9)$$

cujos variantes principais ficam

$$I_1^* = \text{tr}(\mathbf{C}^{\text{dev}}) \quad \text{e} \quad I_2^* = \frac{1}{2} \left\{ (I_1^*)^2 - \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{dev}}^2) \right\} \quad (5.5.10)$$

Com essas definições, uma versão regularizada da função energia de deformação de Mooney-Rivlin \tilde{W} pode ser postulada como:

$$\tilde{W}(I_1^*, I_2^*, J) = \rho_0 \Psi(I_1^*, I_2^*, J) = K_1 (I_1^* - 3) + K_2 (I_2^* - 3) + \frac{\kappa}{2} (\ln [J])^2 \quad (5.5.11)$$

em que a constante material κ é o módulo de flambagem e relaciona a pressão hidrostática com a componente puramente volumétrica do gradiente de deformação. A função correspondente no modelo neo-Hookeano é dada por:

$$\tilde{W}(I_1^*, J) = \rho_0 \Psi(I_1^*, J) = \frac{1}{2} G (I_1^* - 3) + \frac{\kappa}{2} (\ln [J])^2 \quad (5.5.12)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal e dado nesse caso por $G = 2K_1$. Geralmente, utiliza-se $\kappa = 1000G$ [53].

A Relação Constitutiva de Tensão

Lembrando da relação constitutiva de tensão para o PK2, $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$, pode-se expressar tal relação para um material isotrópico semi-incompressível:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = 2J\frac{1}{J}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^T\mathbf{F}^{-T} = 2\frac{\partial\tilde{W}}{\partial\mathbf{C}} = 2\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} \quad (5.5.13)$$

em que $\tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(I_{\mathbf{C}}^*, II_{\mathbf{C}}^*, J; \Omega_1)$ ou $\Psi(\mathbf{C}; \Omega_1) = \Psi(I_{\mathbf{C}}^*, II_{\mathbf{C}}^*, J; \Omega_1)$

Portanto, aplicando a regra da cadeia em (5.5.13), chega-se à:

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \left\{ \frac{\partial\Psi}{\partial I_{\mathbf{C}}^*} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\Psi}{\partial II_{\mathbf{C}}^*} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial\mathbf{C}} + \frac{\partial\Psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}} \right\} \quad (5.5.14)$$

Observação 5.7. Note que o limite de incompressibilidade, quando $J = 1$, foi feita a aproximação de $\kappa \rightarrow \infty$. Modelos regularizados são frequentemente empregados para emular a incompressibilidade na análise em elementos finitos. Nesse caso, o módulo de flambagem κ pode ser visto como um fator de penalidade que penaliza a deformação volumétrica. Note também que outras formas de se abordar a penalização da deformação volumétrica na energia de defor-

mação podem ser adotadas neste contexto. A função $\frac{1}{2}\kappa (J - 1)^2$ pode ser utilizada no lugar de $\frac{1}{2}(\ln [J])^2$ e é frequentemente empregada na análise de materiais semi-incompressíveis.

Observação 5.8. Em modelos materiais em que a compressibilidade é a característica mais importante de resposta da análise, a forma funcional da contribuição volumétrica da função energia de deformação pode ser determinada embasadas em evidências experimentais. Com isso, para materiais semi-incompressíveis, a identificação de κ é feita por meio de dados experimentais.

3. Modelo de Ogden

Em deformações extremamente grandes, sabe-se que os modelos neo-Hookano e Mooney-Rivlin falham ao representar o comportamento de borrachas. Para resolver esse problema, Holzapfel e Ogden [41] propuseram uma forma particular da função energia de deformação:

$$\rho_0 \Psi(\mathbf{U}) = \rho_0 \Psi(\lambda_1^{\mathbf{U}}, \lambda_2^{\mathbf{U}}, \lambda_3^{\mathbf{U}}) \quad (5.5.15)$$

onde $\lambda_i^{\mathbf{U}}$ representa os autovalores de \mathbf{U} , também chamados de *relação de alongamento* e

$$\rho_0 \Psi(\lambda_1^{\mathbf{U}}, \lambda_2^{\mathbf{U}}, \lambda_3^{\mathbf{U}}) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left([\lambda_1^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p} + [\lambda_2^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p} + [\lambda_3^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p} - 3 \right) \quad (5.5.16)$$

em que N é o número total de termos da série e μ_p e α_p são constantes materiais.

Caso Perfeitamente Incompressível

Assumindo que $J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{U}) = \lambda_1^{\mathbf{U}} \lambda_2^{\mathbf{U}} \lambda_3^{\mathbf{U}} = 1$, a energia de deformação é uma função somente de $\lambda_1^{\mathbf{U}}$ e $\lambda_2^{\mathbf{U}}$. Nesse caso,

$$\rho_0 \Psi(\lambda_1^{\mathbf{U}}, \lambda_2^{\mathbf{U}}) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left([\lambda_1^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p} + [\lambda_2^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p} + \frac{1}{[\lambda_1^{\mathbf{U}} \lambda_2^{\mathbf{U}}]^{\alpha_p}} - 3 \right) \quad (5.5.17)$$

Como um caso particular do modelo de Ogden, o modelo de Mooney-Rivlin é obtido fazendo com que $N = 2$, $\mu_1 = 2K_1$, $\mu_2 = -2K_2$, $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -2$.

O Modelo de Ogden Incompressível Regularizado

Sejam $\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*\}$ os alongamentos deviatóricos principais, isto é, os autovalores do tensor de alongamento cujo valor é obtido por $\mathbf{U}^{\text{dev}} = \sqrt{\mathbf{C}^{\text{dev}}}$.

Os autovalores λ_i^* são relacionados com os alongamentos principais λ_i por:

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{J^{\frac{1}{3}}} = \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}}} = \lambda_i^{\frac{2}{3}} (\lambda_j \lambda_k)^{-\frac{1}{3}} \quad (5.5.18)$$

em que (i, j, k) são as permutações de $(1, 2, 3)$. O potencial hiperelástico do modelo de Ogden para a versão incompressível regularizada pode então ser definido como:

$$\rho_0 \Psi (\lambda_1^*, \lambda_2^*, J) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left([\lambda_1^*]^{\alpha_p} + [\lambda_2^*]^{\alpha_p} + \frac{1}{[\lambda_1^* \lambda_2^*]^{\alpha_p}} - 3 \right) + \frac{1}{2} \kappa (\ln [J])^2 \quad (5.5.19)$$

5.6 O Elemento HiperEngCR

5.6.1 Aspectos Iniciais

O presente tópico tem como objetivo mostrar a formulação corrotacional para a hipótese constitutiva hiperelástica baseada no modelo material de Saint Venant-Kirchhoff. Como já foi amplamente descrito, tal modelo é capaz de obter um elemento para grandes deslocamentos e rotações, desde que as deformações sejam pequenas.

5.6.2 Modelo de Saint Venant-Kirchhoff

Este modelo é caracterizado por aplicações em engenharia que envolvam grandes rotações e pequenas deformações. A resposta do material pode ser modelada pela simples extensão das leis da elasticidade linear por meio da substituição das tensões pelo tensor PK2 e do tensor de deformações de Green para o caso linear. Este tipo de material é chamado de Saint Venant-Kirchhoff ou simplesmente Kirchhoff.

A equação geral para esse modelo foi obtida por (2.7.9a), que nada mais é do que uma forma mais ampla da lei de Hooke generalizada, $\sigma_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, para um estado multiaxial e não-linear de tensão e deformação. A seguir, serão descritas algumas propriedades de \mathcal{C} , tais como a que foi mostrada pela **observação 2.13**. Particularmente, a propriedade de simetria que possibilita uma considerável diminuição no número de constantes do material. Muitas dessas propriedades são também aplicáveis ao módulo tangente do material. A partir das simetrias dos tensores de tensão e deformação, os coeficientes materiais em (2.7.9a) têm uma *simetria menor*, ou seja:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{jikl} = \mathcal{C}_{ijlk} \quad (5.6.1)$$

O modelo material de Saint Venant-Kirchhoff tem trajetória independente de equilíbrio e possui um potencial de energia de deformação elástico. A energia de deformação por unidade de volume, é generalizado para o estado multiaxial por:

$$W = \int S_{ij} dE_{ij} = \int \mathcal{C}_{ijkl} E_{kl} dE_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{C}_{ijkl} E_{ij} E_{kl} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathcal{C} : \mathbf{E} \quad (5.6.2)$$

A tensão é então obtida a partir de:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (5.6.3)$$

que é equivalente ao tensor obtido pela Eq. (2.7.8). A energia de deformação é considerada positiva definida, ou seja,

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} \geq 0 \quad \forall \mathbf{E} \quad (5.6.4)$$

A igualdade é assegurada se e somente se $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, o que conduz a um tensor de quarta ordem positivo definido \mathbf{C} . A partir da existência do potencial de energia de deformação (5.6.2), pode-se aplicar (2.7.9b) e (2.7.9c). A suavidade do potencial implica em:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} \quad (5.6.5)$$

Por essa razão, se o material possui um potencial suave W , \mathbf{C} tem *simetria maior*:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (5.6.6)$$

A simetria maior da matriz constitutiva do material é uma condição necessária para a simetria da matriz de rigidez tangente desenvolvida na seção 4.6. Se o módulo tangente não apresentar simetria maior, a rigidez tangente não será simétrica.

Como o tensor de quarta ordem possui $3^4 = 81$ constantes independentes, essas 81 constantes se relacionam com as 9 componentes dos tensores de tensão e de deformação. A simetria dos tensores de tensão e deformação requer que somente 6 componentes independentes de tensão sejam relacionadas com outras 6 componentes de deformação. O resultado da simetria menor reduz o número de constantes elásticas para $6 \times 6 = 36$. Por sua vez, a simetria maior (5.6.6) conduz a um número de constantes elásticas de $n(n+1)/2 = 21$, para $n = 6$. Por isso, a consideração da simetria material reduz consideravelmente o número de constantes materiais independentes.

A matriz de constantes elásticas é usualmente implementada utilizando a notação de Voigt, uma vez que é difícil de se trabalhar com matrizes de quarta ordem. Essa notação permite obter as componentes do tensor pelo mapeamento do primeiro e do segundo par de índices, o que resulta em:

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{E}\}, \quad S_a = C_{ab}E_b \quad (5.6.7)$$

que é a forma alternativa de se escrever (2.7.9a) e pode ser explicitada por:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{sim.} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \quad (5.6.8)$$

Ao observar (5.6.8), nota-se que a matriz $[C]$ tem 21 componentes elásticas. Essa equação é assegurada para materiais completamente anisotrópicos segundo o modelo de Kirchhoff.

Quando existe a simetria material de três planos mutuamente ortogonais (madeira e material compósito com fibras alinhadas, por exemplo), o número de coeficientes elásticos é reduzido para 9. Tais materiais são chamados de *ortotrópicos*. Com isso, a Eq. (5.6.8) fica:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{sim.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{pmatrix} \quad (5.6.9)$$

Os nove coeficientes materiais independentes para um material ortotrópico são: $E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}$ e ν_{23} . Sendo que E_i representa o módulo de elasticidade longitudinal na direção i , G_{ij} é o módulo de elasticidade transversal no plano $i - j$ e ν_{ij} simboliza o coeficiente de Poisson no plano $i - j$.

Outro exemplo importante de simetria material é a chamada *isotropia*. Um material isotrópico é aquele as propriedades materiais não depende da direção, portanto, a relação tensão-deformação é idêntica quando expressa em qualquer sistema de coordenada cartesiana retangular. Muitos materiais podem ser modelados como isotrópicos, tais como metais e cerâmicas, para pequenas deformações [16].

Para um material isotrópico segundo o modelo de Kirchhoff, o tensor C é isotrópico. O tensor de quarta ordem isotrópico pode ser, genericamente, obtido a partir de uma combinação linear dos termos dos deltas de Kronecker:

$$C_{ijkl} = \underbrace{\lambda \delta_{ij} \delta_{kl}}_{1^\circ \text{ termo}} + \underbrace{\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})}_{2^\circ \text{ termo}} + \underbrace{\mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})}_{3^\circ \text{ termo}} \quad (5.6.10)$$

Devido à simetria da deformação, o produto da terceira parcela da Eq. (5.6.10) com

a deformação desaparece, portanto, assume-se que $\mu' = 0$. Dessa forma, a Eq. (5.6.10) fica:

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.6.11)$$

que após algum algebrismo demonstrado por [17] pode ser colocado na forma compacta:

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathcal{I} \quad (5.6.12)$$

onde λ e μ são as constantes materiais independentes e são chamadas de *constantes de Lamé*, \mathbf{I} representa o tensor identidade de segunda ordem cujo valor é obtido por $\mathbf{I} = \delta_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$ e \mathcal{I} é o tensor identidade de quarta ordem e é dado por $\mathcal{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l$. Então, a relação tensão-deformação para um material isotrópico segundo o modelo de Kirchhoff pode ser escrito substituindo (5.6.12) em (5.6.7), o que conduz à:

$$S_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij} = \mathcal{C}_{ijkl} E_{kl} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \mathcal{C} : \mathbf{E} \quad (5.6.13)$$

As constantes de Lamé podem ser expressas em termos das constantes de engenharia, de tal maneira que:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad \kappa = \lambda + \frac{2\nu}{3} \quad (5.6.14)$$

em que κ representa o módulo de flambagem do material.

Dessa forma, esta seção apresentou o modelo utilizado para formular o elemento HiperEngCR que está baseado no modelo de Saint Venant-Kirchhoff para materiais isotrópicos.

5.7 O Elemento HiperBioCR

5.7.1 Aspectos Preliminares

O objetivo desta seção é apresentar detalhadamente a formulação do elemento HiperBioCR, cujas hipóteses são:

- Grandes deslocamentos e rotações;
- Deformações finitas.

É importante destacar que este modelo é uma pequena modificação do modelo apresentado por Ogden que é incompressível e regularizado.

5.7.2 A Hiperelasticidade da Pele Humana

Com o intuito de se modelar o comportamento da pele humana, considere-se a seguinte relação constitutiva:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{C}} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad \text{com} \quad \tilde{W}(\mathbf{C}; \Omega_1) = \tilde{W}(I_{\mathbf{C}}^*, II_{\mathbf{C}}^*, J; \Omega_1) \quad (5.7.1)$$

que depois de aplicar a regra da cadeia fica:

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}^*} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}^*} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (5.7.2)$$

em que \tilde{W} representa o potencial hiperelástico dado por Dervaux *et al.* [26] que é um caso especial do polinômio reduzido para $N = 3$. O problema agora consiste em determinar as derivadas parciais da Eq. (5.7.2).

- Determinação de $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}}$

Lembrando que $III_{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^T) \det(\mathbf{F}) = (\det[\mathbf{F}])^2 = J^2$, tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \{\det[\mathbf{C}]\} \quad (5.7.3)$$

Após extenso algebrismo, chega-se à:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \{\det[\mathbf{C}]\} = (\det[\mathbf{C}]) \mathbf{C}^{-T} = J^2 \mathbf{C}^{-T} \quad (5.7.4)$$

consequentemente, uma vez que $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-T}$, tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-T} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} III_{\mathbf{C}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.5)$$

- Determinação de $\frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}}$

Seja $I_{\mathbf{C}}^* = I_1^* = \text{tr}(\mathbf{C}^{\text{dev}})$ e aplicando a Eq. (5.5.9), obtém-se:

$$I_{\mathbf{C}}^* = \text{tr}(\mathbf{C}^{\text{dev}}) = J^{-\frac{2}{3}} \text{tr}(\mathbf{C}) = III_{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{3}} \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (5.7.6)$$

Como $\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \{ \text{tr}(\mathbf{C}) \} = \mathbf{I}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left\{ \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \text{tr}[\mathbf{C}] \right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \text{tr}[\mathbf{C}] + \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \{ \text{tr}[\mathbf{C}] \} \\ &= \left(-\frac{2}{3} \right) \left(J^{-\frac{2}{3}-1} \right) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \text{tr}[\mathbf{C}] + \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \mathbf{I} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{2}{3J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \text{tr}[\mathbf{C}] \right\} \\ &= \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{2}{3J} \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-T} \text{tr}[\mathbf{C}] \right\} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{\text{tr}[\mathbf{C}]}{3} \mathbf{C}^{-T} \right\} \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Portanto,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{\text{tr}[\mathbf{C}]}{3} \mathbf{C}^{-T} \right\} \quad (5.7.8)$$

e lembrando que o tensor de Green à direita é simétrico:

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{\text{tr}[\mathbf{C}]}{3} \mathbf{C}^{-1} \right\} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = III_{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{3}} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right\} \quad (5.7.9)$$

- Determinação de $\frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}}$

Seja $II_{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{2} \left\{ (I_{\mathbf{C}}^*)^2 - \text{tr}[\mathbf{C}_{\text{dev}}^2] \right\}$, então:

$$\frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left\{ (I_{\mathbf{C}}^*)^2 - \text{tr}[\mathbf{C}_{\text{dev}}^2] \right\} \quad (5.7.10)$$

Aplicando (5.5.9) no traço de (5.7.10), tem-se:

$$\text{tr}[\mathbf{C}_{\text{dev}}^2] = J^{-\frac{4}{3}} \text{tr}[\mathbf{C}^2] \quad (5.7.11)$$

o que produz:

$$II_{\mathbf{C}}^* = \frac{1}{2} III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \left\{ (\text{tr}[\mathbf{C}])^2 - \text{tr}[\mathbf{C}^2] \right\} \quad (5.7.12)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left\{ (I_{\mathbf{C}}^*)^2 - J^{-\frac{4}{3}} \text{tr}[\mathbf{C}^2] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2I_{\mathbf{C}}^* \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \text{tr}[\mathbf{C}^2] \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2I_{\mathbf{C}}^* \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} - \text{tr}[\mathbf{C}^2] \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \right) - J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr}[\mathbf{C}^2]) \right\} \end{aligned} \quad (5.7.13)$$

mas,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = III_{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{3}} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right\} \quad (5.7.14)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \right) = -\frac{4}{3} \left(J^{-\frac{4}{3}-1} \right) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{4}{3} \left(J^{-\frac{7}{3}} \right) \frac{1}{2} J \mathbf{C}^{-T} = -\frac{4}{6} \left(J^{-\frac{4}{3}} \right) \mathbf{C}^{-T} = -\frac{4}{6} III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.15)$$

Denotando,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr} [\mathbf{C}^2]) = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \{ C_{rs} C_{sr} \} = \frac{\partial C_{rs}}{\partial C_{ij}} C_{sr} + C_{rs} \frac{\partial C_{sr}}{\partial C_{ij}} = \delta_{ri} \delta_{sj} C_{sr} + C_{rs} \delta_{si} \delta_{rj} = C_{ji} + C_{ji} \quad (5.7.16)$$

o que leva à:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr} [\mathbf{C}^2]) = 2\mathbf{C}^T = 2\mathbf{C} \quad (5.7.17)$$

Assim, chega-se finalmente à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \left\{ 2I_{\mathbf{C}}^* \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} - \text{tr} [\mathbf{C}^2] \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \right) - J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr} [\mathbf{C}^2]) \right\} \\ &= I_{\mathbf{C}}^* \frac{\partial I_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{C}^2] \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \right) - \frac{1}{2} J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr} [\mathbf{C}^2]) \\ &= I_{\mathbf{C}}^* III_{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{3}} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right\} + \frac{1}{3} \text{tr} [\mathbf{C}^2] III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}^{-1} - III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5.7.18)$$

que pode ser re-escrito como:

$$\frac{\partial II_{\mathbf{C}}^*}{\partial \mathbf{C}} = \left\{ \text{tr} [\mathbf{C}] III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \right\} \mathbf{I} - \left\{ III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} \right\} \mathbf{C} + \left\{ \frac{1}{3} \text{tr} [\mathbf{C}^2] III_{\mathbf{C}}^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{C}} \right\} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.19)$$

- Determinação de $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}^*}$

Seja $\tilde{W}(I_1^*, I_2^*, J) = K_1 (I_{\mathbf{C}}^* - 3) + K_2 (I_{\mathbf{C}}^* - 3)^3 + \frac{1}{2} \kappa (\ln [J])^2$ ou, alternativamente, $\tilde{W}(I_1^*, I_2^*, J) = K_1 (I_1^* - 3) + K_2 (I_1^* - 3)^3 + \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2$, a derivada parcial nos dois casos é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}^*} = K_1 + 3K_2 (I_{\mathbf{C}}^* - 3)^2 \quad (5.7.20)$$

- Determinação de $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}^*}$

Análogo ao que foi deduzido para (5.5.2), tem-se:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}^*} = 0 \quad (5.7.21)$$

- Determinação de $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial J}$ ¹

Pode-se avaliar a derivada parcial da energia de deformação sob duas abordagens:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial J} = \kappa (\ln [J]) \frac{1}{J} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial J} = \kappa (J - 1) \quad (5.7.22)$$

Portanto, substituindo (5.7.5), (5.7.9) e (5.7.19)-(5.7.22) em (5.7.2), o PK2 pode ser obtido de duas maneiras, a primeira:

$$\mathbf{S} = 2J^{-\frac{2}{3}} \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \mathbf{I} + \left\{ \kappa (\ln [J]) - \frac{2}{3} J^{-\frac{2}{3}} I_C \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \right\} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.23a)$$

e a segunda:

$$\mathbf{S} = 2J^{-\frac{2}{3}} \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \mathbf{I} + \left\{ \kappa (J - 1) J - \frac{2}{3} J^{-\frac{2}{3}} I_C \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \right\} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.23b)$$

em que as constantes $K_1 = \frac{1}{2}$ e $K_2 = \frac{1}{1050}$.

5.7.3 A Formulação Incremental CR

Descrição do Problema

Seja o campo de deslocamentos representado pela Fig. 5.3 e obtido a partir de:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t_{n+1}) \quad (5.7.24)$$

Então,

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}_{n+1} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_n = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}_n \quad (5.7.25)$$

Observação 5.9. Considera-se que as configurações e as variáveis de estado são conhecidas em Ω_n .

Observação 5.10. As equações de equilíbrio são determinadas em Ω_{n+1} .

Com isso, em t_{n+1} , a formulação fraca do problema pode ser descrita como encontrar $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathbb{K}_{\mathbf{u}}^0$ de tal maneira que:

$$F(\mathbf{u}_{n+1}; \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V}_{\mathbf{u}}^0 \quad (5.7.26a)$$

¹ Nesta tese, será utilizado o modelo em que $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial J} = \kappa (\ln [J]) \frac{1}{J}$. Entretanto, foi apresentado uma forma alternativa de se equacionar o problema, ver Eq. (5.7.22) e (5.7.23b).

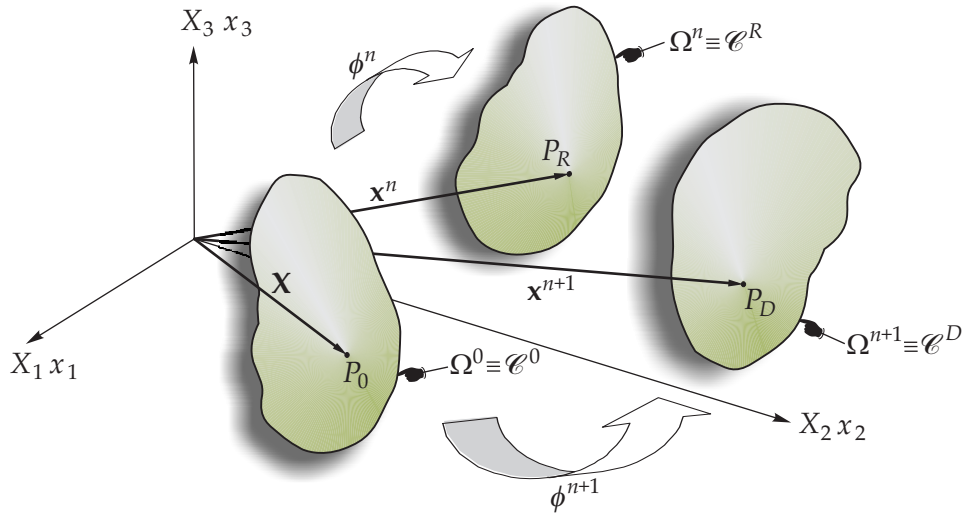


Figura 5.3: Campo de deslocamento conforme descrição cinemática CR.

em que

$$F(\mathbf{u}_{n+1}; \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u} \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0^t} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{u} \, dA_0 \quad (5.7.26b)$$

e, para cada tempo $t \in [0, t_f]$:

$$\mathbb{K}_{\mathbf{u}}^0 = \{ \mathbf{u} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \text{ seja suficientemente regular e } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \text{ em } \mathbf{X} \in \Gamma_{\mathbf{u}}^0 \} \quad (5.7.26c)$$

$$\mathbb{V}_{\mathbf{u}}^0 = \{ \delta \mathbf{u} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta \mathbf{u} \text{ seja suficientemente regular e } \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0 \text{ em } \mathbf{X} \in \Gamma_{\mathbf{u}}^0 \} \quad (5.7.26d)$$

Uma vez que (5.7.26) envolve a solução de um sistema não-linear, o método de Newton é proposto para resolvê-lo.

Linearização e Método de Newton

Seja,

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n \quad \text{e} \quad k = 0 \quad (5.7.27)$$

em que k representa o número de iterações do método de Newton, sendo $k = 0$ o valor inicial assumido para a última solução convergida no tempo t_n . Dessa forma, na k -ésima iteração, tem-se:

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \quad (5.7.28)$$

Com o intuito de determinar $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$, é necessário impor a seguinte condição:

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}; \delta \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V}_{\mathbf{u}}^0 \quad (5.7.29)$$

Considerando que $F(\cdot)$ seja suficientemente suave, então:

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}; \delta \mathbf{u}) = F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (5.7.30)$$

Expandindo a Eq. (5.7.30) em série de Taylor em $\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}$, tem-se:

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) \simeq F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) + DF(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}] \quad (5.7.31)$$

o que leva à:

$$DF(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}] = -F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) \quad (5.7.32)$$

Determinação de $DF(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}]$

Conforme foi apresentado na seção 2.4, por definição:

$$\begin{aligned} DF(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u})}{\epsilon} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} [F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u})] \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

Agora, desde que Ω_0 seja fixo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} [F(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u})] \Big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) : \nabla_0 \delta \mathbf{u} d\Omega_0 \right] \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)})] \Big|_{\epsilon=0} : \nabla_0 \delta \mathbf{u} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (5.7.34)$$

Como $\mathbf{P} = \mathbf{P} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \right\}$, é possível obter:

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P} \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \right\} \Big|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \right] \Big|_{\epsilon=0} \quad (5.7.35)$$

onde

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \epsilon \nabla_0 (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \quad (5.7.36)$$

Como resultado,

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \nabla_0 (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \quad (5.7.37)$$

que, finalmente, implica em:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \right] \nabla_0 (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) \quad (5.7.38)$$

Portanto, a Eq. (5.7.32) fica:

$$DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}; \delta \mathbf{u} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right] = \int_{\Omega_0} \left[\mathcal{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right] \nabla_0 \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) : \nabla_0 \delta \mathbf{u} d\Omega_0 \quad (5.7.39a)$$

em que \mathcal{A} simboliza o tensor de quarta ordem do módulo tangente global cujas componentes podem ser expressar por:

$$\mathcal{A}_{ijkl} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) = \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \Big|_{\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}} \quad (5.7.39b)$$

Aplicando as definições dos primeiro e segundo tensores de Piola-Kirchhoff introduzidos pelas Eqs. (2.5.18) e (2.5.24), respectivamente, e a partir do que foi definido em (5.7.39b), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right]_{ijkl} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (F_{ip} S_{pj}) = \frac{\partial F_{ip}}{\partial F_{kl}} S_{pj} + F_{ip} \frac{\partial S_{pj}}{\partial F_{kl}} \\ &= \delta_{ik} \delta_{pl} S_{pj} + F_{ip} \frac{\partial S_{pj}}{\partial F_{kl}} = \delta_{ik} S_{lj} + F_{ip} \frac{\partial S_{pj}}{\partial F_{kl}} \end{aligned} \quad (5.7.40)$$

Ao avaliar (5.7.40), nota-se que para determinar o módulo tangente global, requer-se a derivada de PK2 em relação ao gradiente de deformação. Portanto, definindo que essa relação é dada por:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathcal{D}_{pjkl} = \frac{\partial S_{pj}}{\partial F_{kl}} \quad (5.7.41)$$

Então, a Eq. (5.7.40) pode ser re-escrita como:

$$\left[\mathcal{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right) \right]_{ijkl} = \delta_{ik} S_{lj} + F_{ip} \mathcal{D}_{pjkl} \quad (5.7.42)$$

Neste ponto, a determinação da derivada de PK2 em relação à \mathbf{F}_{n+1} é requerida. Por essa razão, deve-se aplicar a definição do tensor de Green à direita para a iteração $n + 1$, ou seja,

$$\mathbf{C}_{n+1} = (\mathbf{F}_{n+1})^T \mathbf{F}_{n+1} \quad (5.7.43)$$

Substituindo (5.7.43) em (5.7.41), produz:

$$\mathcal{D} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \hat{\mathcal{D}} \mathcal{H}, \quad \text{com} \quad \hat{\mathcal{D}} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \quad (5.7.44)$$

em que $\hat{\mathcal{D}}$ e \mathcal{H} representam a contribuição material e geométrica do módulo tangente, respectivamente. Assim, a parte geométrica do módulo tangente pode ser computada em no-

tação indicial por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{rskl} &= \frac{\partial C_{rs}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (F_{mr} F_{ms}) \\ &= \delta_{rl} F_{ks} + F_{kr} \delta_{sl}\end{aligned}\quad (5.7.45)$$

Como $\hat{\mathcal{D}}$ possui contribuição material e lembrando que o modelo constitutivo hiperelástico da pele humana foi definido pela Eq. (5.7.23a), então:

$$\mathbf{S} = \alpha(J, I_C^*) \mathbf{I} + \beta(I_C, J, I_C^*) \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.46a)$$

sendo

$$\alpha(J, I_C^*) = 2J^{-\frac{2}{3}} \left[K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right] \quad \text{e} \quad \beta(I_C, J, I_C^*) = \kappa (\ln [J]) - \frac{1}{3} I_C \alpha(J, I_C^*) \quad (5.7.46b)$$

Portanto, o objetivo agora é determinar as derivadas parciais de (5.7.44) quando o modelo constitutivo for dado por (5.7.46), isto é,

$$\hat{\mathcal{D}}_{ijkl} = \frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} \delta_{ij} + \frac{\partial \beta(I_C, J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} C_{ij}^{-1} + \beta(I_C, J, I_C^*) \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ C_{ij}^{-1} \right\} \quad (5.7.47)$$

Determinação de $\frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ C_{ij}^{-1} \right\}$

Note que $\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{I}$, por esse motivo:

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial C_{kl}} \mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{kl}} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{kl}} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial C_{kl}} \mathbf{C} \quad (5.7.48)$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial C_{kl}} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial C_{kl}} \mathbf{C}^{-1} \quad (5.7.49)$$

o que acarreta em:

$$\frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial C_{kl}} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial C_{rs}}{\partial C_{kl}} \mathbf{C}^{-1} = \delta_{rk} \delta_{sl} \quad (5.7.50)$$

Determinação de $\frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}}$

Como $\alpha(J, I_C^*) = 2J^{-\frac{2}{3}} \left[K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right]$, logo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ 2J^{-\frac{2}{3}} (K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2) \right\} \\
&= 2 \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \right\} + 2J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right\} \\
&= 2 \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \right\} + 6K_2 J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ (I_C^* - 3)^2 \right\} \\
&= 2 \left(K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right) \frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \right\} + 12K_2 J^{-\frac{2}{3}} (I_C^* - 3) \frac{\partial I_C^*}{\partial C_{kl}} \quad (5.7.51)
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \right\} = \left(-\frac{2}{3} \right) J^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}}$ e $\frac{\partial J}{\partial C_{kl}} = \frac{1}{2} J C_{kl}^{-1}$, então:

$$\frac{\partial}{\partial C_{kl}} \left\{ J^{-\frac{2}{3}} \right\} = \left(-\frac{1}{3} \right) J^{-\frac{2}{3}} C_{kl}^{-1} \quad (5.7.52)$$

Além disso,

$$\frac{\partial I_C^*}{\partial C} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{C}^{-1} \right\}, \quad \frac{\partial I_C^*}{\partial C_{kl}} = \left(J^{-\frac{2}{3}} \right) \left\{ \delta_{kl} - \frac{1}{3} I_C C_{kl}^{-1} \right\} \quad (5.7.53)$$

Substituindo (5.7.53) e (5.7.52) em (5.7.51) e colocando a notação indicial, chega-se à:

$$\frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} = -\frac{2}{3} \left[K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right] J^{-\frac{2}{3}} C_{kl}^{-1} + 12K_2 J^{-\frac{4}{3}} (I_C^* - 3) \left[\delta_{kl} - \frac{1}{3} I_C C_{kl}^{-1} \right] \quad (5.7.54)$$

Determinação de $\frac{\partial \beta(I_C, J, I_C^*)}{\partial C_{kl}}$

Lembrando que $\beta(I_C, J, I_C^*) = \kappa (\ln [J]) - \frac{1}{3} I_C \alpha(J, I_C^*)$, tem-se:

$$\frac{\partial \beta(I_C, J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} = \kappa \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} - \frac{1}{3} \left\{ \alpha(J, I_C^*) \frac{\partial I_C}{\partial C_{kl}} + I_C \frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} \right\} \quad (5.7.55)$$

mas,

$$\frac{\partial I_C}{\partial C_{kl}} = \frac{\partial C_{ss}}{\partial C_{kl}} = \delta_{sk} \delta_{sl} = \delta_{kl} \quad (5.7.56)$$

Portanto,

$$\frac{\partial \beta(I_C, J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} = \kappa \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} - \frac{1}{3} \left\{ \alpha(J, I_C^*) \delta_{kl} + I_C \frac{\partial \alpha(J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} \right\} \quad (5.7.57)$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (5.7.57), (5.7.54) e (5.7.50) em (5.7.47), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}_{ijkl} = & \left\{ -\frac{2}{3} \left[K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right] J^{-\frac{2}{3}} C_{kl}^{-1} + 12K_2 J^{-\frac{4}{3}} (I_C^* - 3) \left[\delta_{kl} - \frac{1}{3} I_C C_{kl}^{-1} \right] \right\} \delta_{ij} \\ & + \left\{ \kappa \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} - \frac{1}{3} \left[\alpha (J, I_C^*) \delta_{kl} + I_C \frac{\partial \alpha (J, I_C^*)}{\partial C_{kl}} \right] \right\} C_{ij}^{-1} - \beta (I_C, J, I_C^*) C_{ir} \frac{\partial C_{rs}^{-1}}{\partial C_{kl}} C_{sj} \end{aligned} \quad (5.7.58)$$

ou em sua forma compacta:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}} = & \left\{ -\frac{2}{3} \left[K_1 + 3K_2 (I_C^* - 3)^2 \right] J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}^{-1} + 12K_2 J^{-\frac{4}{3}} (I_C^* - 3) \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_C \mathbf{C}^{-1} \right] \right\} \mathbf{I} \\ & + \left\{ \kappa \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} - \frac{1}{3} \left[\alpha \mathbf{I} + I_C \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{C}} \right] \right\} \mathbf{C}^{-1} - \beta \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (5.7.59)$$

Com isso, este capítulo apresentou a formulação hiperelástica no contexto da descrição cinemática corrotacional. Inicialmente, foi definido o potencial de energia livre de Helmholtz também conhecido por potencial hiperelástico. A seguir, foi postulado o axioma da indiferença de sistema de coordenadas. Alguns casos especiais como a simetria e restrição materiais foram avaliados. Além disso, foi desenvolvido o material hiperelástico baseado no modelo de Saint Venant-Kirchhoff que é a estrutura do programa HiperEngCR. Por fim, o modelo hiperelástico que simula o comportamento da pele humana foi proposto e avaliado do ponto de vista da formulação incremental corrotacional que é a base do elemento HiperBioCR. Assim, o próximo capítulo irá apresentar as soluções numéricas baseadas nos modelos propostos por esta tese e compará-los com soluções numéricas provenientes de outros modelos e soluções analíticas. Ademais, irá avaliar os aspectos computacionais ao se analisar materiais hiperelásticos vistos sob a ótica dos elementos corrotacionais.

Capítulo 6

Exemplos Numéricos

6.1 Introdução

Neste capítulo, os elementos cujas formulações foram descritas no capítulo anterior são aplicados na solução de vários problemas. Inicialmente, serão apresentados exemplos numéricos da análise não-linear geométrica e física estática de algumas estruturas planas e espaciais, constituídas por elementos finitos triangulares de casca segundo a descrição cinemática corrotacional (CR) apresentada nos capítulos anteriores, de modo a permitir a avaliação do desempenho da formulação utilizada, bem como a eficiência do algoritmo.

A implementação computacional foi desenvolvida em dois programas escritos em linguagem Fortran[®], a saber:

- HiperEngCR → Para problemas hiperelásticos tipicamente de engenharia, com a restrição de ser utilizado em análises com grandes rotações e deslocamentos, porém, pequenas deformações;
- HiperBioCR → Para análises hiperelásticas que simulam o comportamento da pele humana sem restrições, ou seja, para grandes deslocamentos e rotações com deformação finita.

Com o intuito de facilitar a visualização das análises foi implementado um pós-processador em linguagem computacional MatLab[®] denominado “ConfigDeformada.m” que permite avaliar a modificação da geometria da estrutura ao longo do processo de carregamento. Para obter os gráficos, foram feitos vários códigos (conforme cada caso) para ser utilizado no GnuPlot. Todos os programas implementados estão descritos na Tab. 6.1.

Os resultados produzidos comprovam as vantagens em utilizar a descrição cinemática corrotacional mencionada. Para verificar a eficiência do método, a solução proposta neste trabalho será comparada com soluções formuladas por outros elementos finitos provenientes da cinemática Lagrangeana Total e soluções analíticas.

Tabela 6.1: Programas implementados para obtenção dos elementos e das curvas com os resultados.

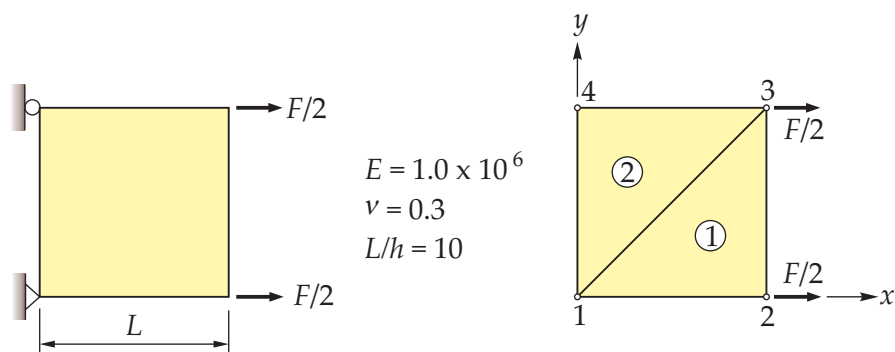
Programa	Linguagem	Capítulo	Descrição
HiperEngCR	Fortran [®]	5.6.2	Modelo CR hiperelástico de Kirchhoff
HiperBioCR	Fortran [®]	5.7.2 e 5.7.3	Modelo CR hiperelástico da pele humana
ConfigDeformada.m	MatLab [®]	—	Plotagem da configuração deformada
Plot.plt	GnuPlot	—	Plotagem das curvas 2D e 3D

Para análise dos resultados, será validado primeiramente o triângulo de 3 nós para problemas com pequenas deformações e, posteriormente, o triângulo de 3 nós para grandes deformações. Para isso, serão resolvidos exemplos numéricos diferentes tipos de estruturas: vigas, placas e cascas (cilindros e esferas).

6.2 Aplicações com o HiperEngCR

6.2.1 Patch Teste

A fim de examinar a capacidade de resposta do modelo hiperelástico proposto, um simples *patch* teste é avaliado. O problema consiste em uma placa quadrada submetida a um carregamento concentrado em suas extremidades livres conforme mostra a Fig. 6.1. As propriedades mecânicas e geométricas são as seguintes: módulo de Young $E = 1.0 \times 10^6$; coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$; lado $L = 10.0$ e relação lado-espessura $L/h = 10$.

**Figura 6.1:** Simples teste de esforço axial plano.

Para resolver o sistema não-linear de equações algébricas, foram empregados os métodos de Newton-Raphson com o comprimento de arco. Esses métodos utilizados de maneira combinada, garantem o controle do processo através da trajetória de equilíbrio. Portanto, o processo iterativo é usado até que a diferença entre as configurações atual e prévia seja obtida conforme uma certa tolerância no erro. O critério de erro, cujo valor é $\epsilon \leq 10^{-6}$, é adotado e os resultados obtidos para este primeiro exemplo foram alcançados

após 20 passos de carga.

A Fig. 6.2 ilustra o desenvolvimento gradual do deslocamento axial com o aumento da carga F . A linha contínua representa a configuração deformada segundo o passo de carregamento, enquanto que a linha tracejada descreve a estrutura indeformada.

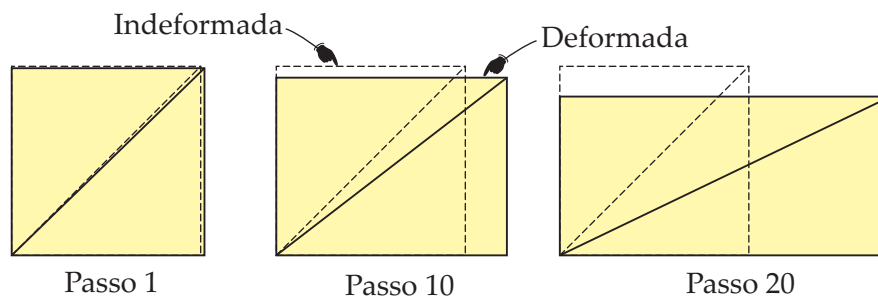


Figura 6.2: Configuração da estrutura deformada e indeformada ao longo da análise.

A solução do elemento é comparada com a obtida por Toscano and Dvorkin [101] e a Fig. 6.3 mostra claramente uma excelente concordância entre os resultados. Para o primeiro passo de carga, por exemplo, o deslocamento axial obtido por Toscano e Dvorkin foi de 0.16, enquanto que o elemento hiperelástico corrotacional (HiperEngCR) apontou 0.12, ou seja, uma diferença percentual de 0.39%. No caso do último passo de carga, essa diferença diminuiu para 0.06%.

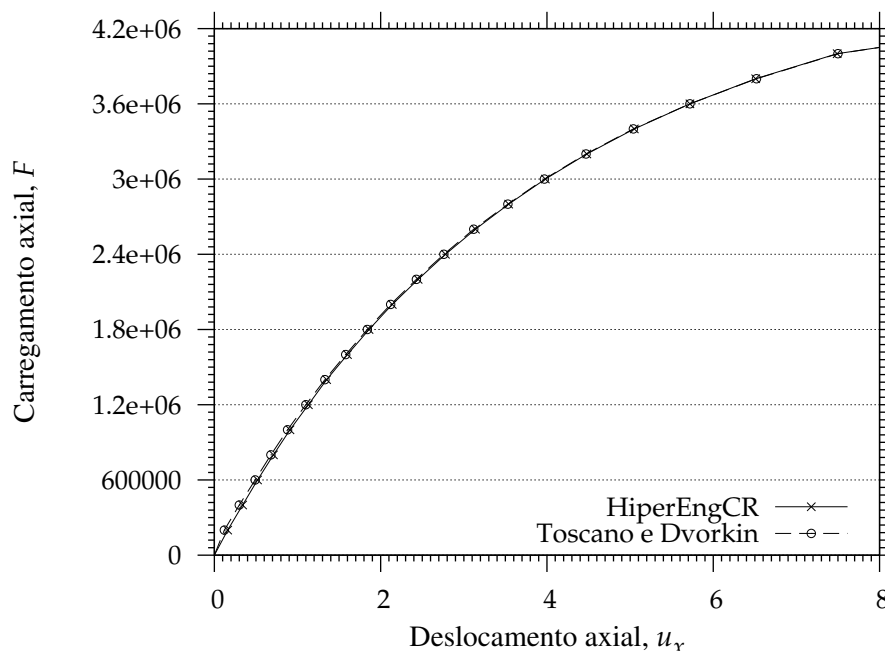


Figura 6.3: Comparação do deslocamento axial no nó 2 entre o modelo proposto por Toscano e Dvorkin [101] e o presente trabalho.

A partir desse *patch* teste bem simples e eficaz, foi possível perceber que o modelo

proposto obteve resultados muito próximos de um elemento bastante conceituado na literatura. De fato, o *patch* teste se tornou uma ferramenta necessária para avaliar se um novo elemento é capaz de convergir ou não.

6.2.2 Viga em Balanço com Momento Aplicado em sua Extremidade Livre

A próxima aplicação numérica é descrita pela Fig. 6.4. Trata-se de uma viga engastada em balanço submetida a um momento fletor constante M em sua extremidade livre. Esse problema foi inicialmente proposto por Haugen [39]. A solução analítica para este problema corresponde a uma viga que descreve uma curvatura de raio R sobre ela mesma cujo valor pode ser obtido a partir de:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \quad (6.2.1)$$

Com o objetivo de avaliar a natureza livre de singularidade do elemento, é investigado o caso em que a viga descreve uma circunferência com duas voltas completas ($\theta = 2\pi$). Apesar deste exemplo não avaliar o comportamento tridimensional de forma robusta, ele serve como um teste severo para rigidez fletora do elemento. As propriedades materiais e geométricas foram escolhidas como $E = 1.2 \times 10^7$, $L/b = 10$, $L/h = 100$ e $\nu = 0$.

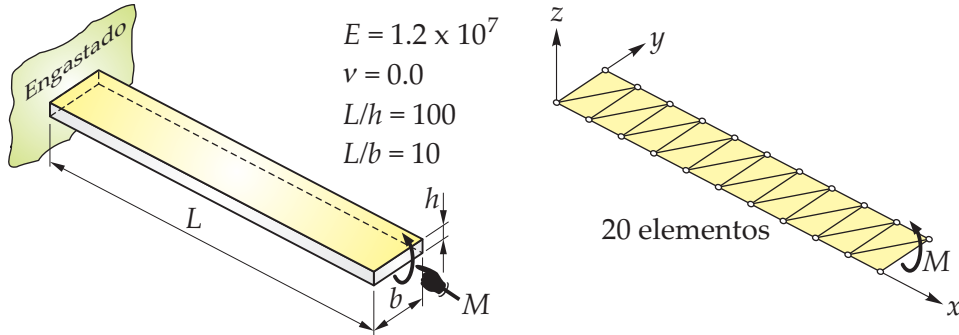


Figura 6.4: Geometria inicial para a viga em balanço submetida a um momento fletor e a discretização do problema.

A análise foi desenvolvida empregando 20 elementos com malha uniforme 10×1 . A solução foi obtida utilizando 40 passos de carga iguais dados por $\Delta M = \frac{M}{40}$, em que o momento foi normalizado por:

$$M = 200\pi\lambda \quad (6.2.2)$$

sendo λ um fator de carga utilizado para representar o número de voltas que a viga estava sujeita. Portanto, para $\lambda = 1$ significa que a viga deu uma única volta sobre ela mesma. Nesta tese, λ variou de 0 até 2. Para cada passo de carga, a convergência foi alcançada para $\epsilon \leq 10^{-4}$ e três iterações. É importante destacar que o passo de carga escolhido foi pequeno, pois as forças de membrana desequilibravam o sistema.

A Fig. 6.5 apresenta todos os passos de carga da análise e a rotação *versus* momento aplicado. Comparando as soluções numéricas, o elemento CR conseguiu um resultado para o momento 1.32% abaixo da solução analítica, enquanto o elemento proposto por Toscano e Dvorkin [101] obteve 1.84% acima.

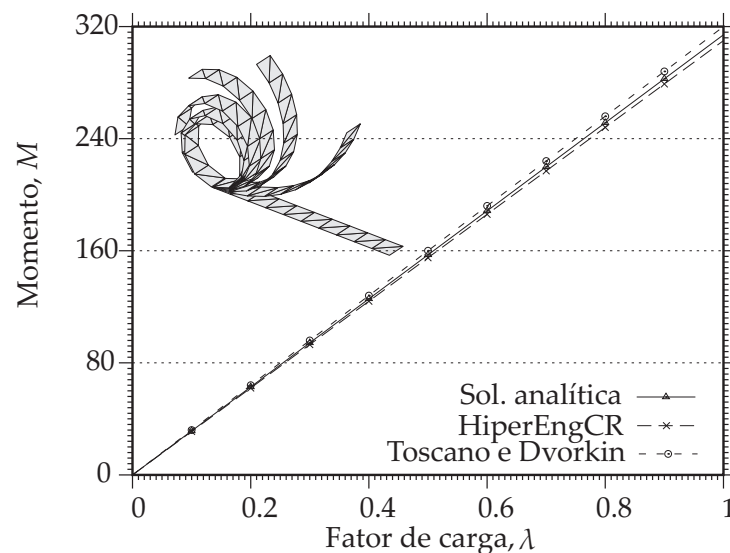


Figura 6.5: Geometrias inicial e deformada para a viga sob momento fletor constante e a convergência das soluções.

Conforme descreve a Tab. 6.2, embora a diferença seja pequena, o elemento corrotacional mostrou resultados melhores.

Tabela 6.2: Soluções numéricas e analítica para a viga em balanço com momento fletor em sua extremidade livre.

Fator de carga, λ	Sol. analítica	HiperEngCR	Toscano e Dvorkin
0.1	31.42	31.00	32.00
0.2	62.83	62.00	64.00
0.3	94.25	93.00	96.00
0.4	125.67	124.00	128.00
0.5	157.08	155.00	160.00
0.6	188.50	186.00	192.00
0.7	219.92	217.00	224.00
0.8	251.33	248.00	256.00
0.9	282.75	279.00	288.00
1.0	314.17	310.00	320.00

A seguir, são apresentadas as trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos horizontal e vertical da extremidade livre da viga, ver Figs. 6.6(a) e 6.6(b), respectivamente. Os resultados são comparados com o modelo proposto por Haugen [39]. O resultado gerado pelo elemento HiperEngCR foi muito próximo com o obtido por Haugen, entretanto, este último apresentou uma inconsistência com a teoria, pois com uma volta completa ($\lambda = 1$), o

deslocamento vertical não foi nulo como era de se esperar. O modelo proposto por esta tese conseguiu apresentar essa consistência.

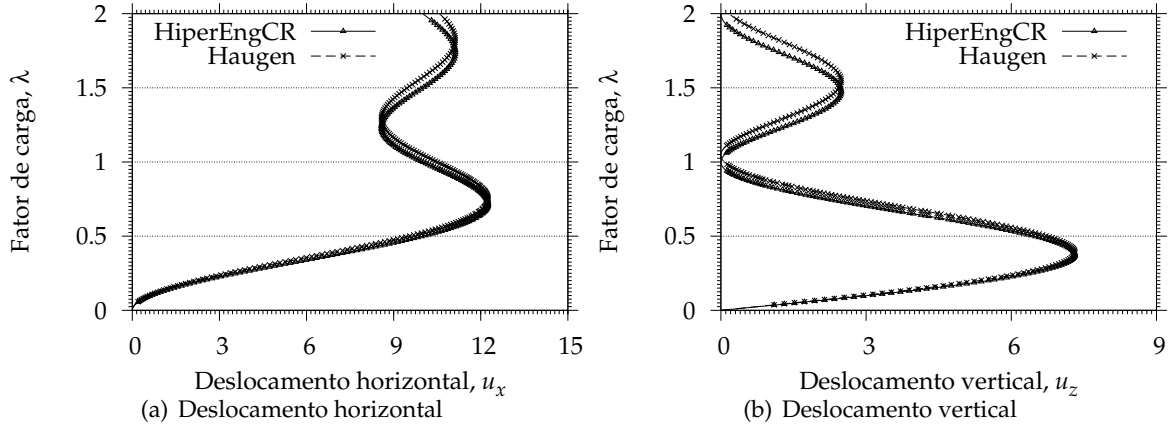


Figura 6.6: Trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos na extremidade livre da viga.

6.2.3 Placa Sujeita a uma Carga Concentrada

O próximo exemplo se refere a uma placa quadrada com duas extremidades engastadas e outras duas livres submetida a um carregamento concentrado no ponto A , conforme apresenta a Fig. 6.7. Considerando a simetria do problema, o modelamento foi feito com metade da placa, totalizando 100 elementos dispostos em uma malha 5×10 . As características geométricas e mecânicas estão descritas na Fig. 6.7. O lado da placa $a = 400$ foi adotado. Além disso, as coordenadas dos pontos A e B foram consideradas como $(80, 0)$ e $(0, 80)$, respectivamente.

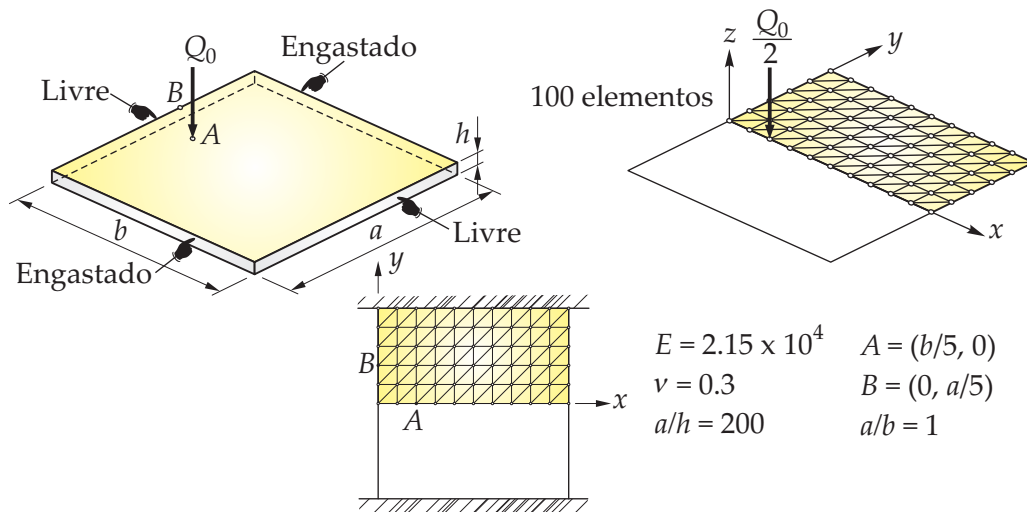


Figura 6.7: Geometria da placa com a discretização do problema e as propriedades mecânicas.

Os resultados numéricos apresentaram excelente concordância com dados numéricos e experimentais provenientes de Pacoste [74], conforme aponta a Fig. 6.8. Para o deslocamento no ponto *A*, o elemento HiperEngCR obteve um deslocamento de 1.8487 para o último passo de carga contra 1.9001 para o elemento proposto por Pacoste. Considerando que os resultados experimentais sejam os valores de referência, o HiperEngCR obteve um erro de 8.23% e Pacoste 11.70%. O mesmo não aconteceu para o ponto *B*, onde os erros foram de 8.40% e 6.72% para os elementos HiperEngCR e Pacoste, respectivamente.

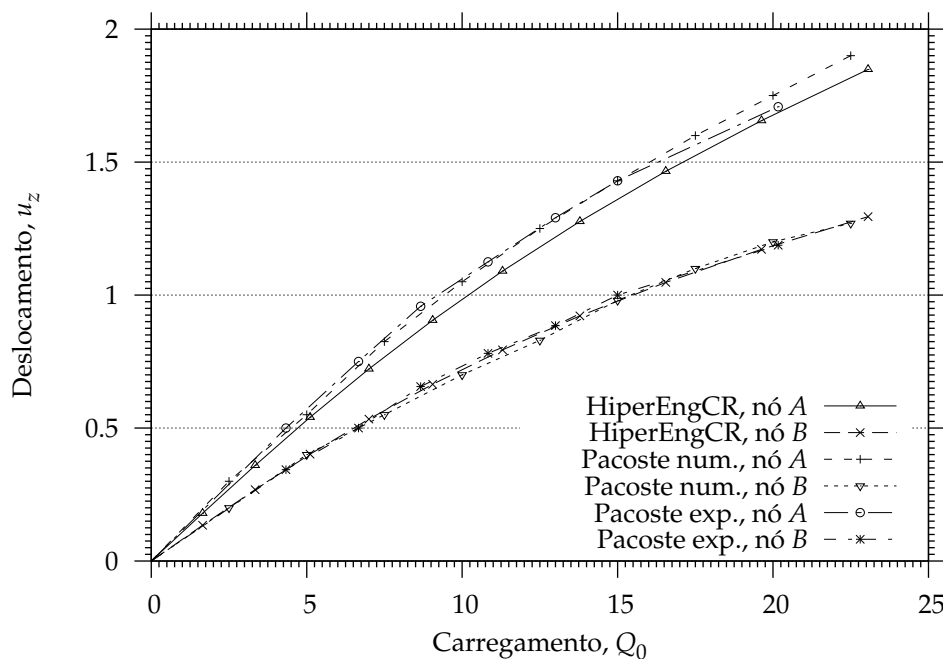


Figura 6.8: Trajetórias de equilíbrio para os pontos *A* e *B* da placa.

A seguir, as Figs. 6.9(a) e 6.9(b) ilustram a configuração deformada para o primeiro e o último passos de carga, respectivamente. Os valores são referentes aos deslocamentos no ponto *A*.

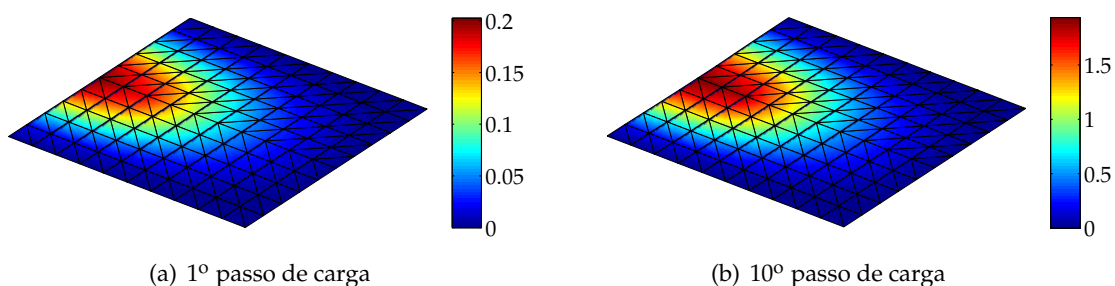


Figura 6.9: Configuração deformada referente ao ponto *A* para o primeiro e último passos de carga.

Assim, o elemento desenvolvido por Pacoste apresentou melhor resultado para o

deslocamento no ponto B e o elemento proposto nesta tese foi melhor para demonstrar o comportamento no ponto A .

6.2.4 Casca Cilíndrica com Carga Concentrada

A quarta estrutura a ser analisada consiste de uma cobertura cilíndrica apoiada nas duas bordas longitudinais e livre nas outras duas extremidades, conforme mostra a Fig. 6.10. A estrutura é submetida a uma carga concentrada no centro da casca cilíndrica, na qual se observa um *snap-through*. Devido às condições de simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura foi modelada e foram empregadas malhas uniformes 2×2 , 4×4 e 8×8 contendo respectivamente, 8, 32 e 128 elementos triangulares.

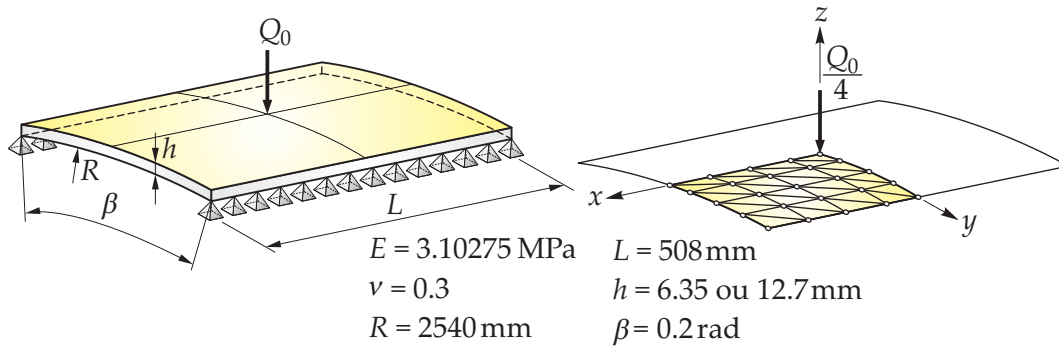


Figura 6.10: Propriedades física e geométrica de uma cobertura cilíndrica simplesmente apoiada e discretização do modelo.

As trajetórias de equilíbrio mostradas na Fig. 6.11 apresentaram grande concordância com os resultados encontrados por Crisfield [21] especialmente para as malhas mais refinadas. Para avaliar a capacidade do elemento, foram avaliadas duas espessuras: 6.35 mm e 12.70 mm, ver Figs. 6.11(a) e 6.11(b), respectivamente.

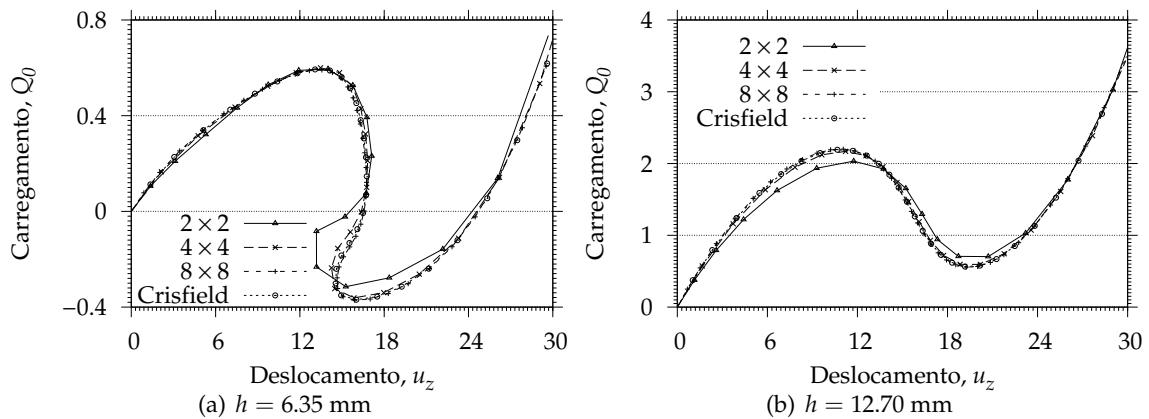


Figura 6.11: Trajetória de equilíbrio para a casca cilíndrica.

Ao observar a Fig. 6.11(a), nota-se que a trajetória de equilíbrio para a estrutura

mais esbelta além de apresentar o *snap-through*, ela exibe o *snap-back*. Isso mostra que o elemento HiperEngCR é robusto o suficiente para avaliar não-linearidades geométricas mais contundentes.

Os deslocamentos máximos foram obtidos após 41 passos de carga para a casca cilíndrica mais delgada e 36 para a mais espessa. Portanto, o passo de carga foi menor para a estrutura mais fina, pois sem esse refinamento o elemento não seria capaz de detectar o *snap-back*. Os valores desses deslocamentos estão sumarizados na Tab. 6.3 para o primeiro e último passos de carregamento.

Tabela 6.3: Comparação dos valores de deslocamento máximo para a casca cilíndrica.

	Deslocamento máximo, u_z			
	1º passo		último passo	
	$h = 6.35 \text{ mm}$	$h = 12.70 \text{ mm}$	$h = 6.35 \text{ mm}$	$h = 12.70 \text{ mm}$
2×2	1.364487	1.139839	29.683929	32.11438
4×4	2.146151	1.662659	31.835436	29.882962
8×8	0.89523	0.672436	29.519911	29.709474
Crisfield	1.358245	1.030913	29.597587	29.91752

As configurações deformadas para alguns passos de carga estão descritos na Fig. 6.12 para a estrutura mais delgada com malha 8×8 . Assim é possível avaliar o quanto a deformação aumenta com o acréscimo no incremento de carga.

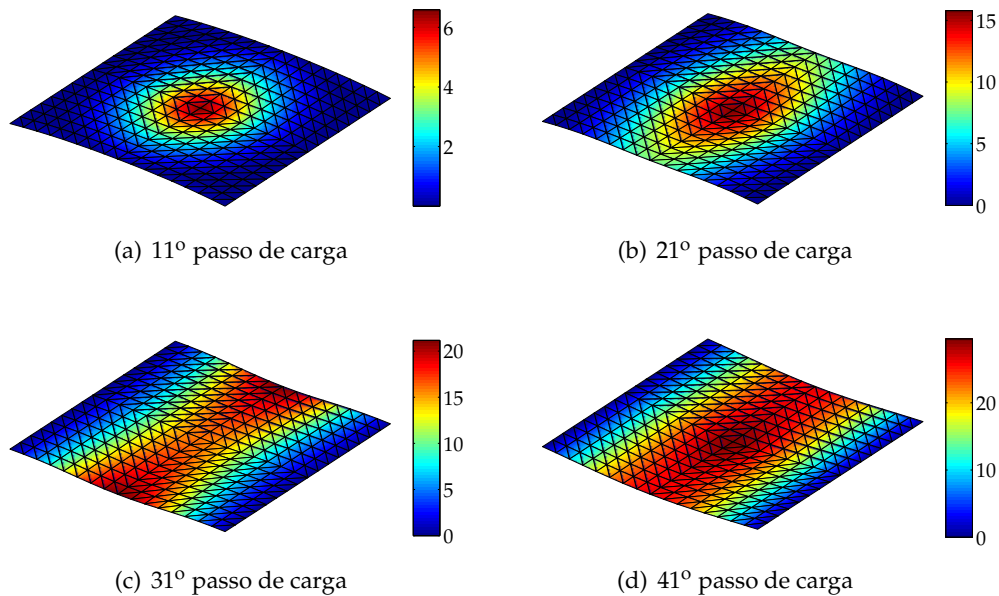


Figura 6.12: Estrutura deformada para $h = 6.35 \text{ mm}$.

Os resultados apontam excelente concordância com o obtido por Crisfield, mesmo para a malha menos refinada.

6.2.5 Cilindro Engastado sob Carga Concentrada

A próxima aplicação se refere a uma casca cilíndrica em balanço submetida a duas cargas concentradas e opostas de magnitude Q_0 ao longo do diâmetro da extremidade livre, conforme indica a Fig. 6.13.

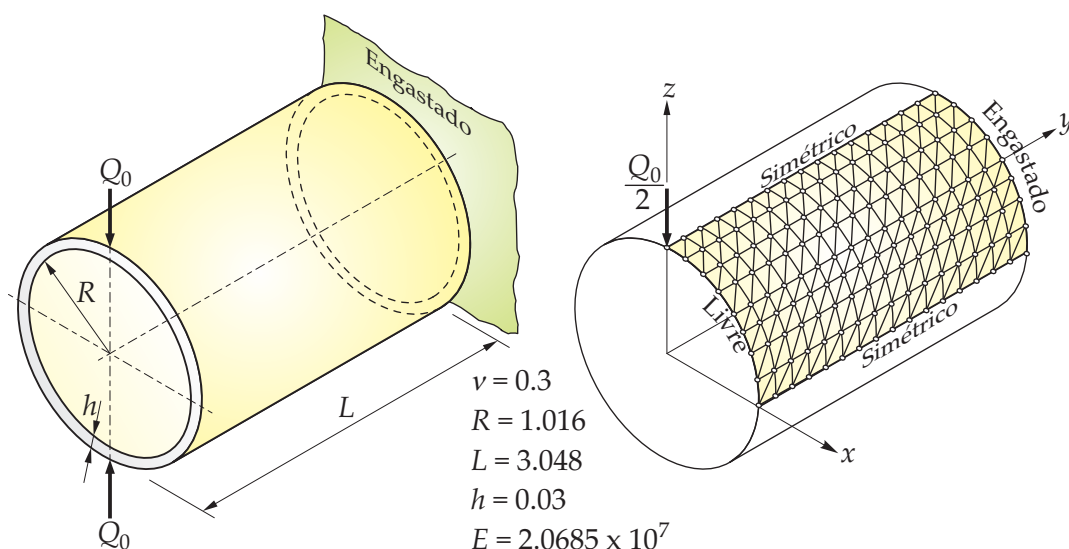


Figura 6.13: Geometria e discretização do problema de um cilindro submetido a uma carga concentrada em sua extremidade livre.

Utilizando a simetria do problema, foi discretizado somente $\frac{1}{4}$ do cilindro com malhas uniformes 16×16 e 20×20 contendo 512 e 800 elementos, respectivamente. A análise foi conduzida até um deslocamento vertical no ponto de carregamento de aproximadamente $1.0R$. Embora este limite não seja fisicamente possível, esta análise representa um excelente teste para verificar a eficiência do algoritmo no tratamento de grandes deslocamentos.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no ponto de carregamento são apresentadas na Fig. 6.14. Percebe-se uma excelente concordância com os resultados de Okstad e Mathisen [73], que discretizaram $\frac{1}{4}$ da estrutura utilizando 976 elementos triangulares e Stander *et al.* [98], que utilizaram uma malha com elementos finitos quadrangulares.

Utilizando o programa ConfigDeformada.m, é possível visualizar as configurações deformadas ao longo do processo de carregamento da estrutura, conforme mostram as Figs. 6.15(a)-6.15(d), para a malha mais refinada. Para obter uma resposta coerente para esta análise, foram empregados 20 passos de carga para malha 16×16 e 36 para 20×20 . Para um mesmo carregamento de 800 unidades de força, Okstad e Mathisen obtiveram um deslocamento máximo de 1.60, contra 1.62 de Standers *et al.* e de 1.6240 do elemento HiperEngCR. Portanto, valores muito próximos entre si.

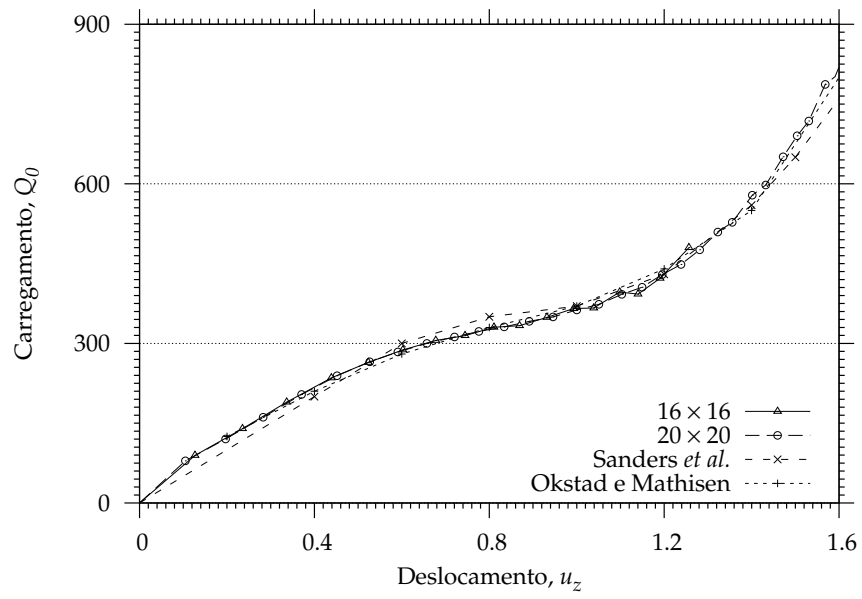


Figura 6.14: Trajetória de equilíbrio para o deslocamento u_z .

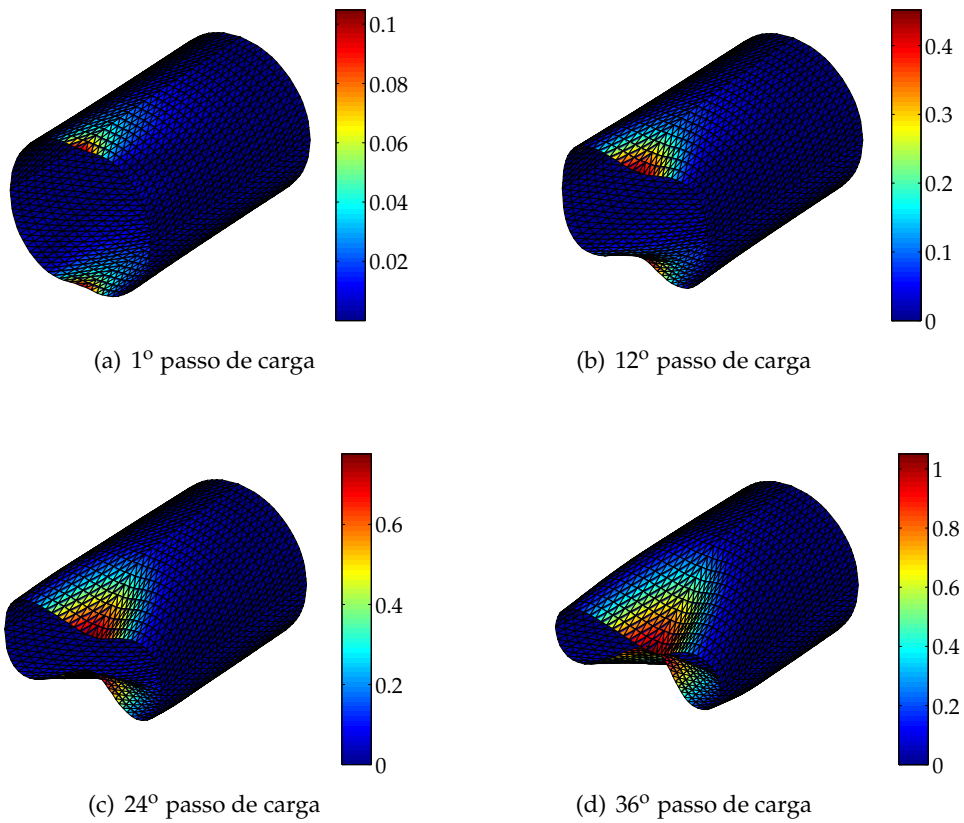


Figura 6.15: Configurações deformada do cilindro em balanço para a malha 20×20 .

6.2.6 Casca Hemisférica com Furo de 18°

O próximo caso a ser estudado, trata-se de uma casca hemisférica com abertura de 18° em seu topo que é submetida à ação de quatro forças F de mesma intensidade, conforme explicita a Fig. 6.16.

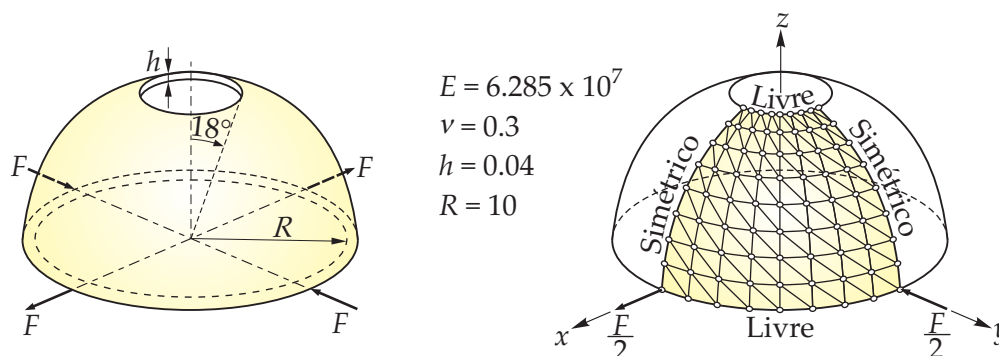


Figura 6.16: Geometria e propriedades mecânicas de uma casca hemisférica com furo de 18°.

Devido às condições de simetria, a estrutura foi modelada com $\frac{1}{4}$ do problema. Foram utilizadas malhas uniformes 4×4 , 8×8 e 16×16 , constituídas por 32, 128 e 512 elementos. O problema foi desenvolvido para um carregamento máximo de $F = 100$ unidades de força. Assim, os deslocamentos xy gerados na estrutura foram de aproximadamente 60% do valor do raio.

A seguir, a Fig. 6.17 ilustra graficamente o comportamento da trajetória de equilíbrio para os deslocamentos u_x e u_y . As três curvas superiores são os deslocamentos na direção y e as três curvas inferiores representam os deslocamentos na direção x . Os resultados foram comparados com os obtidos por Simo *et al.* [92] e com Toscano e Dvorkin [101]. É importante enfatizar que esses valores são referentes à malha mais refinada, isto é, 16×16 .

A fim de comprovar a proximidade entre os valores obtidos neste trabalho e o proposto por Simo, os resultados plotados na Fig. 6.17 estão descritos na Tab. 6.4 para os diferentes modelos.

Tabela 6.4: Comparação entre os resultados obtidos para os deslocamentos máximos nas direções x e y para a casca hemisférica.

Carga	HiperEngCR		Simo <i>et al.</i>		Toscano e Dvorkin	
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	1.4947	1.8203	1.4783	1.8013	1.4800	1.8000
40	2.3013	3.2198	2.2683	3.1301	2.2900	3.2000
60	2.7837	4.2942	2.7540	4.1588	2.7800	4.3000
80	3.1218	5.1548	3.0661	4.9663	3.1000	5.1000
100	3.3900	5.8225	3.3139	5.6174	3.3600	5.8000

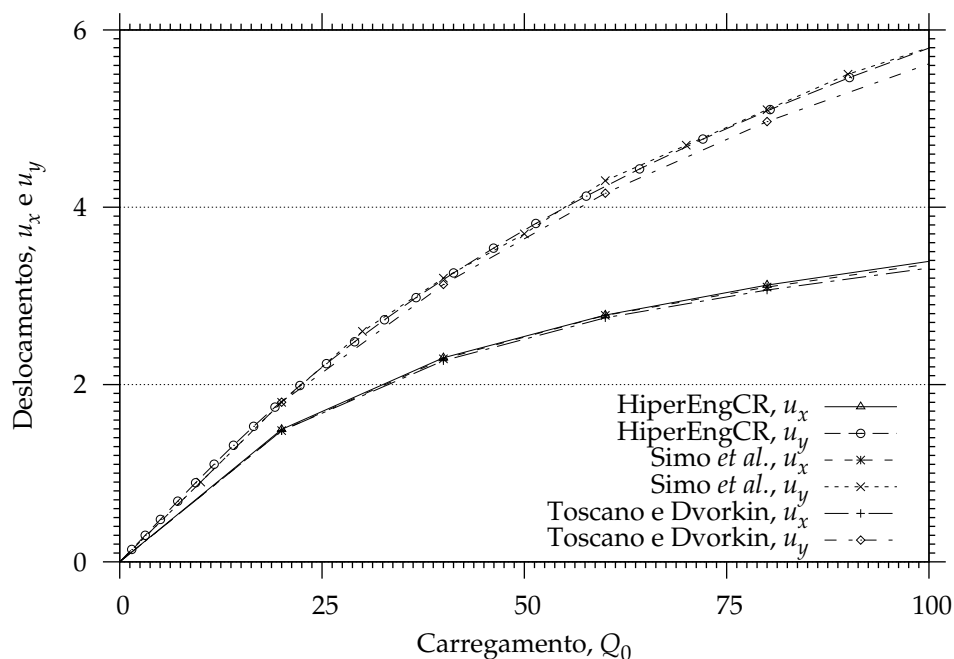


Figura 6.17: Trajetória de equilíbrio para os deslocamentos u_x e u_y .

Com o intuito de avaliar a convergência do elemento HiperEngCR, a Fig. 6.18(a) descreve o caminho de equilíbrio para o maior deslocamento (u_y) com o aumento do refino da malha. A Fig. 6.18(b) apresenta a convergência dos elementos propostos por Simo *et al.*, Toscano e Dvorkin e o HiperEngCR. Mesmo para a malha menos refinada, percebe-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos neste trabalho e o desenvolvido por Simo *et al.*. Por outro lado, a diferença entre o HiperEngCR e o modelo desenvolvido por Toscano e Dvorkin é notável. A Fig. 6.18(b) ajuda a demonstrar o comportamento dessas soluções.

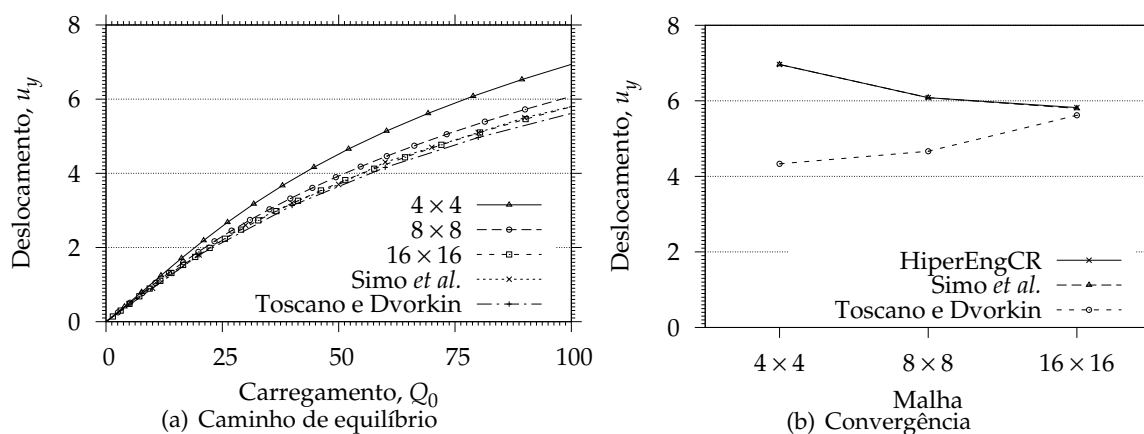


Figura 6.18: Trajetória de equilíbrio e convergência para o deslocamento u_y .

Outro aspecto importante a ser destacado é que o HiperEngCR obteve valores pró-

ximos de Simo *et al.*, todavia com apenas cinco iterações. Isso representa a metade de iterações obtidas por Simo *et al.* para as mesmas malhas. Ademais, foram utilizados 15, 21 e 23 passos de carga para as malhas 4×4 , 8×8 e 16×16 , respectivamente.

As configurações da estrutura deformada ao longo do processo iterativo de aumento de carregamento estão dispostas na Fig. 6.19. Esses valores se referem à malha 16×16

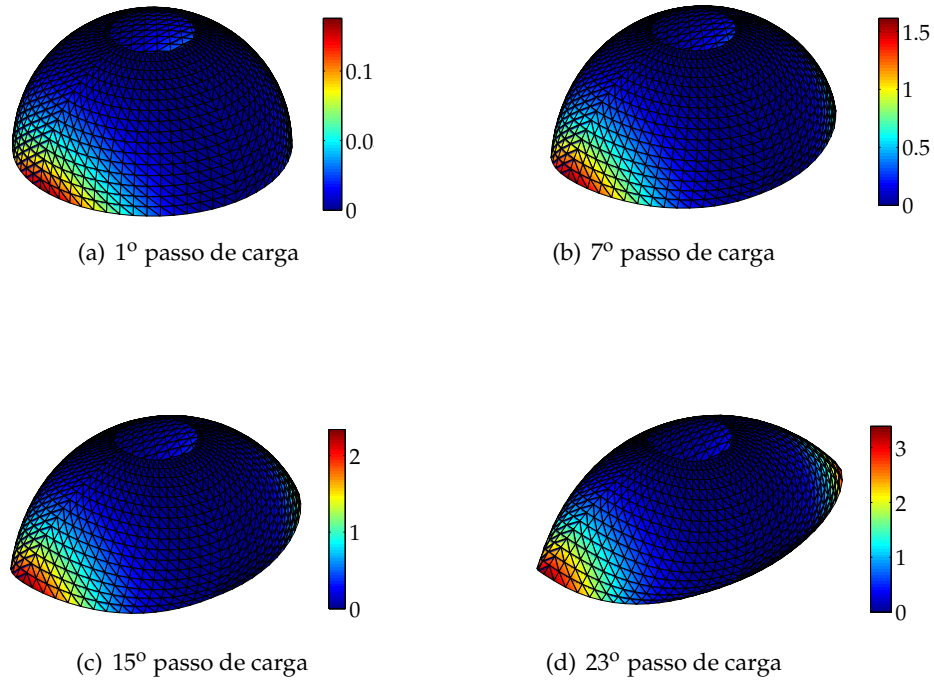


Figura 6.19: Configurações deformada da casca hemisférica com abertura de 18° para malha 16×16 .

Assim, esta seção apresentou várias análises que comprovaram a eficiência e robustez do elemento hiperelástico proposto para os grandes deslocamentos e rotações, porém pequenas deformações. A próxima seção irá apresentar exemplos numéricos com o elemento para as grandes deformações.

6.3 Aplicações com o HiperBioCR

6.3.1 Patch Teste

O *patch* teste se tornou um teste padrão para avaliar novos elementos finitos. Embora não seja necessário ou suficiente para se garantir a convergência, ele é importante para garantir confiança ao elemento. Dessa forma, o primeiro exemplo a ser apresentado é um teste para avaliar a deformação de um elemento hiperelástico no domínio das grandes deformações.

Esta análise se refere ao problema proposto por Bonet e Wood [17] no capítulo que trata da implementação computacional. Conforme descreve a Fig.6.20, as propriedades geométricas e mecânicas são dadas por $L/h = 100$, $\mu = 100$, $\lambda = 150$ e $\rho = 1$, destacando que a placa é quadrada. Os valores entre parênteses se referem aos deslocamentos prescritos. Foi utilizada uma malha uniforme 2×2 contendo 8 elementos triangulares.

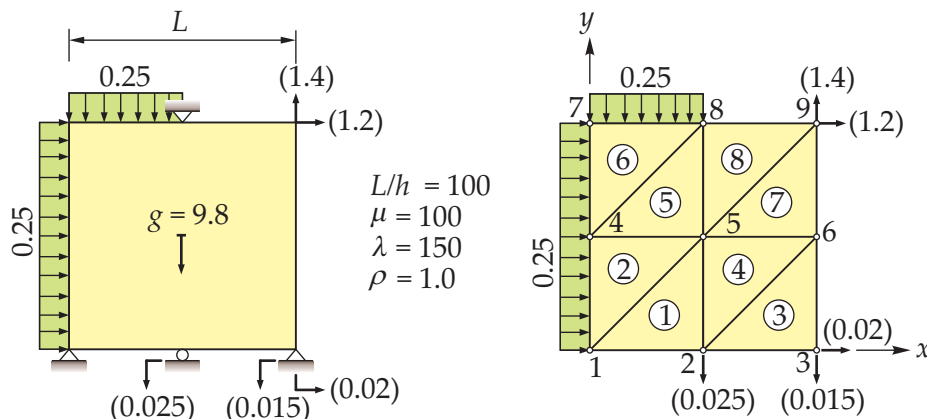


Figura 6.20: Descrição das propriedades físicas e geométricas do *patch* teste.

A seguir, a Fig. 6.21 ilustra a evolução da configuração deformada na estrutura. A linha contínua representa a configuração deformada para o elemento HiperBioCR, a linha tracejada descreve a estrutura deformada segundo o modelo descrito por Bonet e Wood [17], enquanto a linha formada por pontos representa a estrutura sem se deformar.

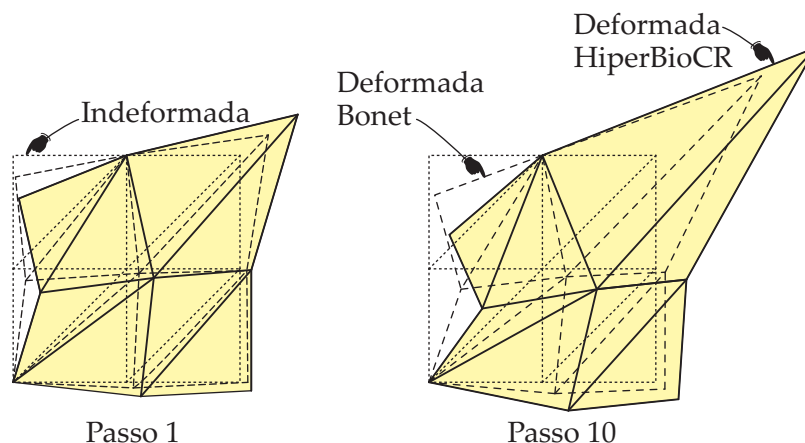


Figura 6.21: Evolução da deformação da estrutura ao longo da análise.

Foram empregados dez incrementos de carga para solucionar o problema. Percebe-se que o elemento HiperBioCR é mais elástico que o proposto por Bonet e Wood. Os deslocamentos máximos no nó 9 foram de $1.7065L$ e $1.4760L$ nas direções x e y , respectivamente, para o elemento HiperBioCR contra $1.4845L$ e $1.3915L$ do elemento desenvolvido por Bonet e Wood. Isso significa que o elemento desenvolvido nesta tese apresentou uma deformação

14.95% maior que o elemento proposto por Bonet e Wood na direção x e 6.07% maior na direção y .

6.3.2 Cobertura Esférica Submetida à Carga Concentrada

A próxima aplicação numérica corresponde a uma cobertura esférica apoiada nas quatro bordas e sujeita à uma carga concentrada Q_0 em seu centro, conforme ilustra a Fig. 6.22. A cobertura esférica é quadrada ($a/b = 1$) de lado $a = 1569.8$, com raio $R = 25.4$ e espessura $h = 99.45$. Suas propriedades mecânicas são: $E = 68.95$ e $\nu = 0.3$. Devido às condições de simetria, foi computado $\frac{1}{4}$ do problema original em uma malha uniforme 5×5 contendo 50 elementos.

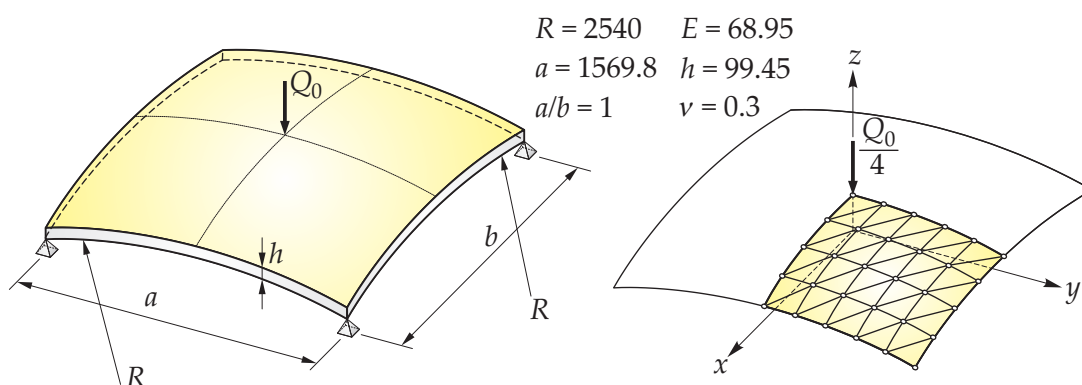


Figura 6.22: Descrição física e geométrica da cobertura esférica e a malha utilizada para discretizar o problema.

Os resultados obtidos foram comparados com os artigos publicados por Bucalem e Bathe [18] e Surana [99]. Este exemplo foi escolhido por apresentar o *snap-through* e, assim, poder avaliar a capacidade de captura da trajetória de equilíbrio correta para o elemento proposto. A Fig. 6.23 mostra esse comportamento.

Ao observar a trajetória de equilíbrio, nota-se uma excelente concordância entre os resultados dos outros autores com o HiperBioCR. Para o último incremento de carga, Bucalem e Bathe obtiveram um deslocamento máximo de 297.8284 unidades de comprimento, contra 300.0 do elemento desenvolvido por Surana e 300.2199 do HiperBioCR. Isso representa uma diferença percentual entre um modelo e outro extremamente pequena.

Devido ao fato desta aplicação numérica apresentar o problema do *snap-through*, foram necessários 110 passos de carga para que a trajetória fosse capturada de maneira correta. Com o intuito de visualizar a configuração deformada com o aumento do carregamento, a Fig. 6.24 descreve as configurações após o carregamento para os incrementos de carga números 1, 35, 70 e 110, respectivamente.

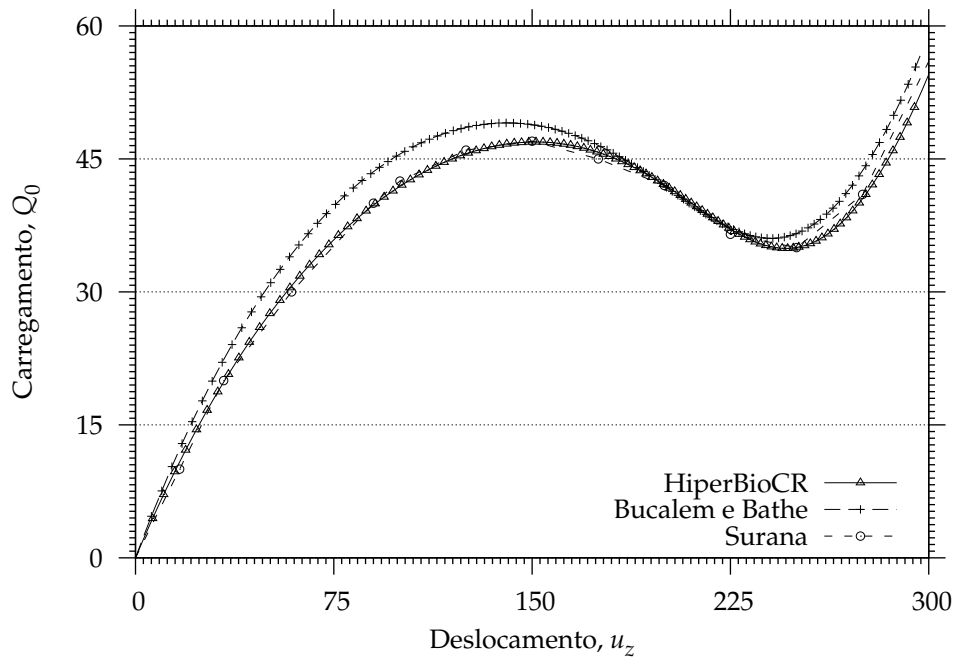


Figura 6.23: Comparação da trajetória de equilíbrio da cobertura submetida a um carregamento concentrado.

Os valores contidos nas barras da Fig. 6.24 se referem às flechas da estrutura.

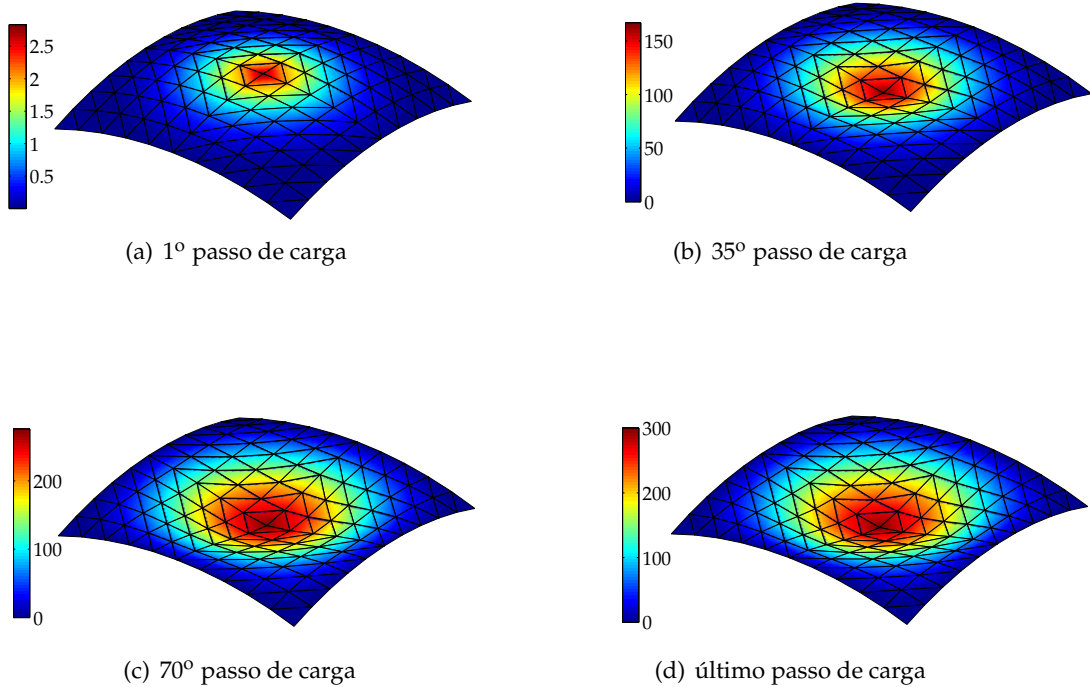


Figura 6.24: Configurações deformada da cobertura esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.

6.3.3 Casca Cilíndrica Estirada

O terceiro exemplo numérico é descrito pela Fig. 6.25. Trata-se de uma casca cilíndrica com as suas extremidades livres que foi submetida à ação de duas cargas verticais diametralmente opostas Q_0 . Utilizando as condições de simetria para o problema, apenas $\frac{1}{8}$ da estrutura foi modelada com uma malha uniforme 8×8 contendo 128 elementos.

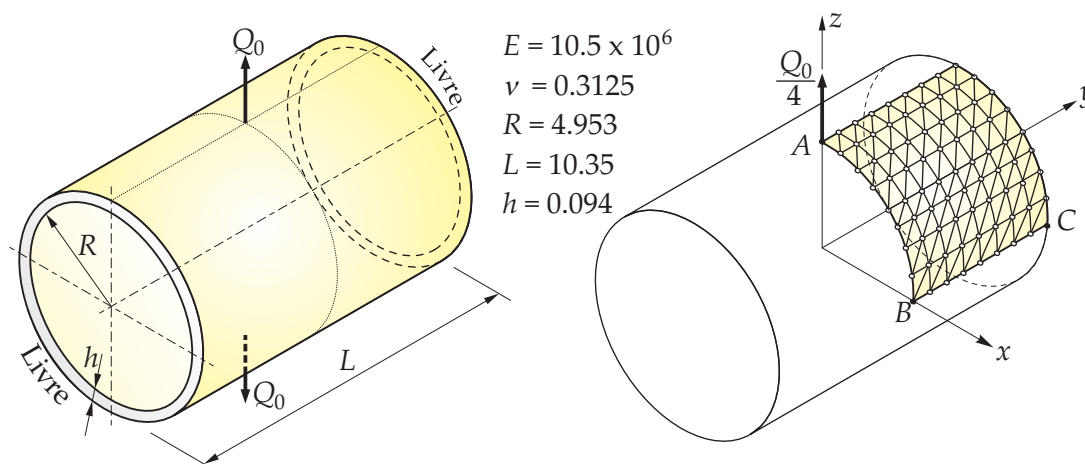


Figura 6.25: Descrição geométrica e mecânica da casca cilíndrica estirada.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no ponto A e horizontal para os pontos B e C estão descritas na Fig. 6.26. Os resultados foram comparados com a tese escrita por Haugen [39]. Os pontos A, B e C são computados pelos nós 1, 9 e 81, respectivamente.

É importante enfatizar que para cargas inferiores à 400 unidades de força, o comportamento da estrutura é definido pelos esforços de flexão. Por outro lado, para esforços superiores à 400 unidades de força, o que define o comportamento da estrutura são os esforços de membrana e os caminhos de equilíbrio sofrem pequenas alterações, conforme previsto por Pacoste [74].

Portanto, este exemplo em específico é bastante interessante para entender e observar a influência dos esforços de membrana à medida que a estrutura se deforma.

Com a intenção de observar numericamente os valores dos deslocamentos máximos, tanto verticais quanto horizontais, no pontos A, B e C da estrutura ao longo do processo incremental de carga, a Tab. 6.5 apresenta os resultados obtidos pelo elemento desenvolvido neste trabalho e o elemento apresentado por Haugen.

Ao observar a Tab. 6.5, percebe-se que o HiperBioCR utilizou vinte e dois passos de carga para finalizar a análise, enquanto que Haugen empregou apenas vinte. Vale destacar que os resultados obtido pelo elemento HiperBioCR está em excelente conformidade com os obtidos por Haugen. Ademais, ao avaliar o último passo de carga para ambos os modelos, o HiperBioCR obteve um valor de 2.69682 unidades de comprimento para o deslocamento u_z ,

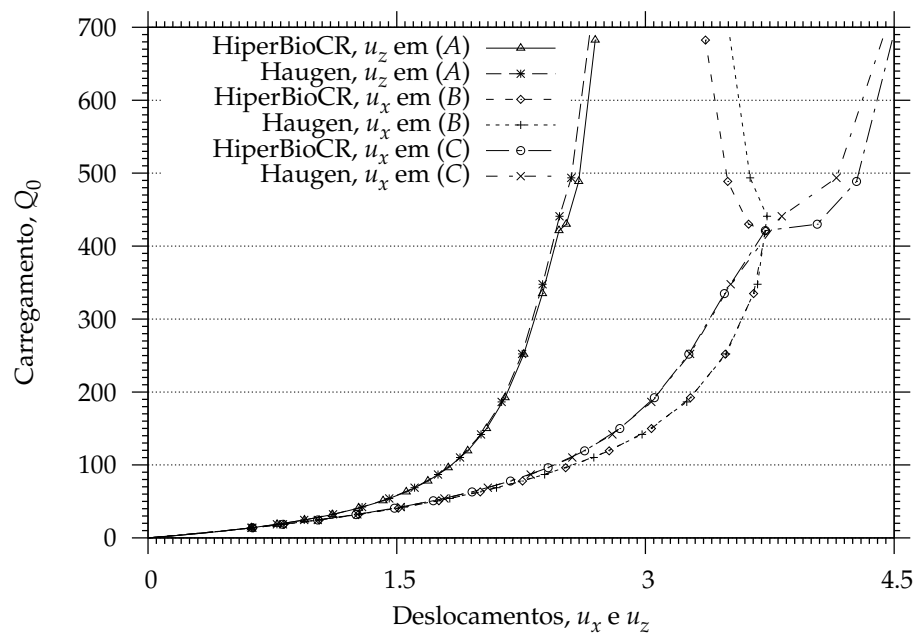


Figura 6.26: Trajetória de equilíbrio para os deslocamentos vertical e horizontal nos pontos A , B e C .

enquanto que Haugen obteve 2.66277, embora para valores de carga diferentes.

Tabela 6.5: Comparação entre os resultados obtidos para os deslocamentos máximos nas direções x e z para a casca hemisférica.

Passo	Carga, Q_0	HiperBioCR			Carga, Q_0	Haugen		
		u_z em A	u_x em B	u_x em C		u_z em A	u_x em B	u_x em C
1	1.91230	0.10501	0.09476	0.09523	1.91550	0.10499	0.09478	0.09508
2	4.15940	0.21948	0.20296	0.20404	4.16650	0.21941	0.20300	0.20371
3	6.82230	0.34386	0.32658	0.32847	6.83400	0.34368	0.32664	0.32792
4	10.01100	0.47845	0.46783	0.47082	10.02800	0.47809	0.46793	0.47001
5	13.87700	0.62335	0.62921	0.63374	13.90100	0.62276	0.62934	0.63261
6	18.64000	0.77845	0.81340	0.82018	18.67100	0.77756	0.81359	0.81864
7	24.62100	0.94330	1.02327	1.03343	24.65900	0.94203	1.02355	1.03141
8	32.03300	1.11143	1.25363	1.26891	32.35900	1.11537	1.26212	1.27460
9	40.67800	1.26949	1.48651	1.50915	42.23100	1.29128	1.52408	1.54429
10	50.88200	1.41790	1.72055	1.75391	54.14500	1.45500	1.78732	1.81979
11	63.08300	1.55716	1.95422	2.00340	68.74900	1.60725	2.04962	2.10183
12	77.87300	1.68790	2.18564	2.25821	86.96700	1.74892	2.30812	2.39184
13	96.12300	1.81101	2.41256	2.51853	110.31000	1.88154	2.55920	2.68840
14	119.29000	1.92801	2.63270	2.78093	141.75000	2.00823	2.80074	2.97966
15	149.97000	2.04140	2.84559	3.03566	186.48000	2.13254	3.03533	3.24925
16	192.28000	2.15362	3.05368	3.27192	252.23000	2.25649	3.26927	3.48692
17	251.92000	2.26614	3.26153	3.48190	347.80000	2.37973	3.51369	3.67648
18	334.94000	2.37892	3.47642	3.65247	440.84000	2.48140	3.82187	3.73295
19	421.31000	2.47880	3.72311	3.72470	493.51000	2.55289	4.15175	3.63130
20	430.05000	2.52287	4.03577	3.62191	689.51000	2.66277	4.43823	3.50698
21	488.64000	2.59713	4.27293	3.49605				
22	682.42000	2.69682	4.48833	3.36204				

A seguir, são ilustradas pela Fig. 6.27 as configurações deformada conforme cada incremento do carregamento.

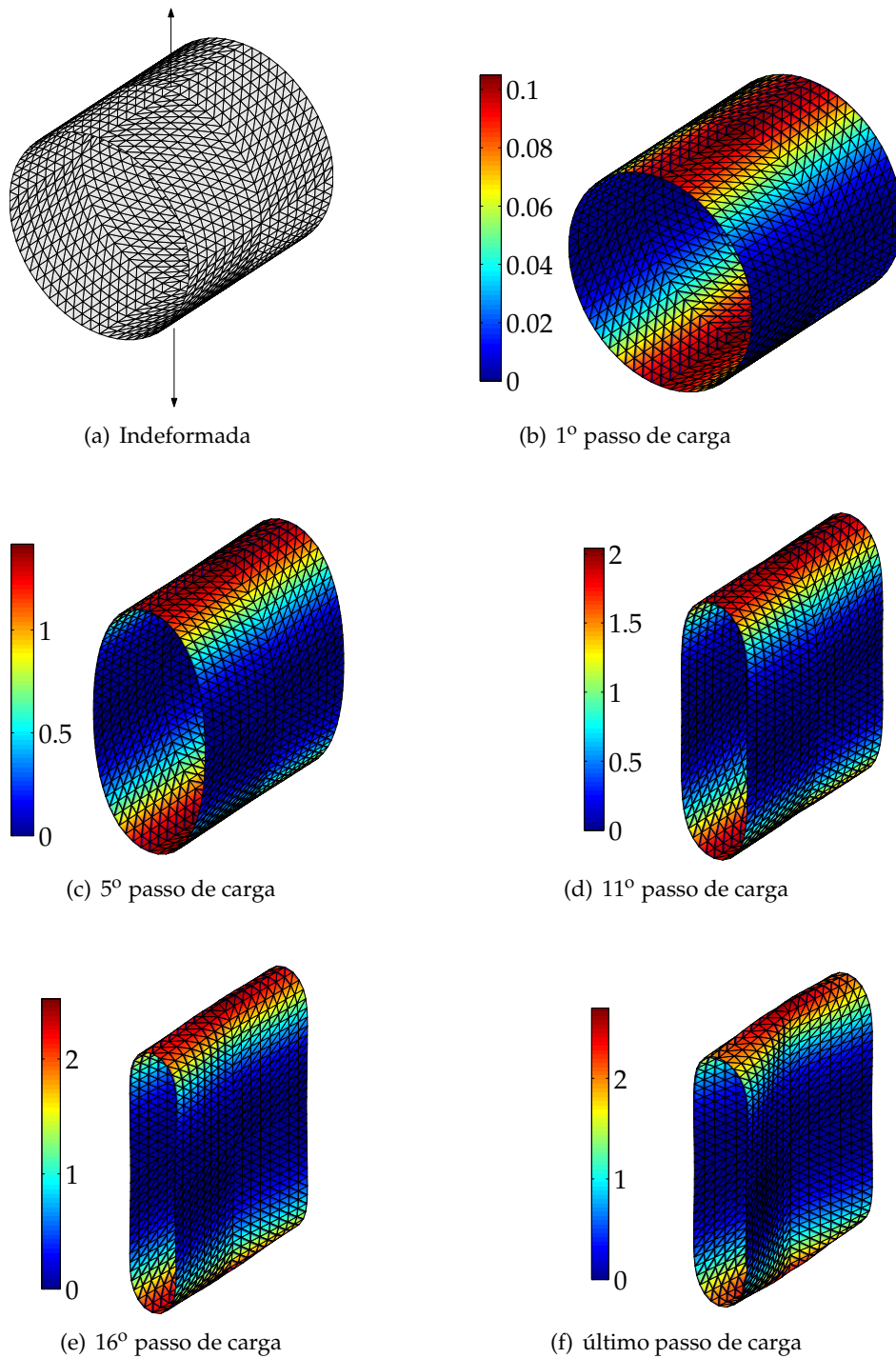


Figura 6.27: Configurações deformada da cobertura esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.

6.3.4 Casca Esférica de Borracha Sujeita à uma Carga Concentrada

A última aplicação desta tese se refere a uma casca esférica de borracha (meia bola de tênis) engastada em sua base que está submetida à ação de um carregamento pontual P em seu topo, conforme ilustra a Fig. 6.28. As propriedades geométricas e mecânicas são as seguintes: $R = 26.3$ mm, $h = 4.4$ mm, $\nu = 0.5$ e $E = 4$ MPa.

Note que o coeficiente de Poisson se assemelha bastante com as da pele humana. Conforme as condições de simetria, somente $\frac{1}{4}$ do problema foi discretizado em uma malha uniforme 8×8 possuindo 96 elementos triangulares.

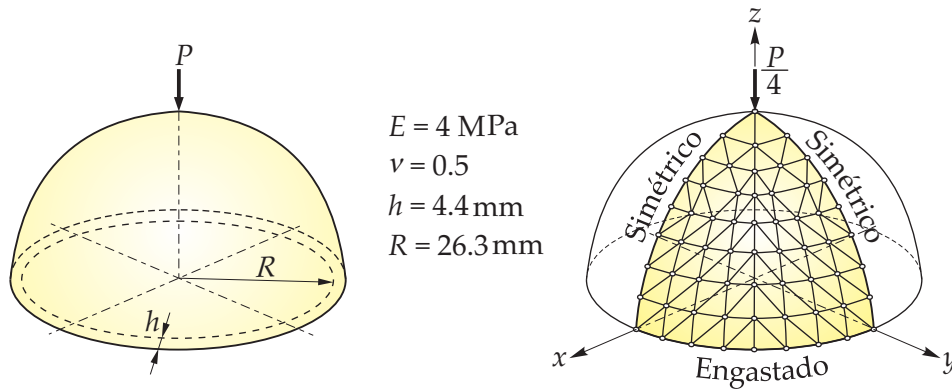


Figura 6.28: Descrições física e geométrica da casca esférica submetida a um carregamento concentrado.

Para plotagem do gráfico contendo a trajetória de equilíbrio da estrutura, os valores de deslocamento e carga foram normalizados a fim de que a comparação entre outros resultados fosse possível. Dessa forma:

$$\text{deslocamento vertical} = \frac{u_z}{R} \quad \text{e} \quad P_0 = \frac{P}{Eh^2} \quad (6.3.1)$$

A análise foi conduzida até que o deslocamento máximo fosse dado pelo valor do raio. Os resultados obtidos estão de acordo com os encontrados por Simo *et al.* [92] e com os dados experimentais apresentados por Taber [100], conforme pode ser observado pelas trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical no topo da estrutura, apresentadas na Fig. 6.29.

Para o valor de deslocamento normalizado máximo, o resultado proveniente do modelo HiperBioCR foi de 0.73782, contra 0.7200 encontrado por Simo *et al.* e 0.6470 oriundo de dados experimentais obtidos por Taber. Como a solução analítica aponta para um deslocamento máximo de 0.7600, o elemento desenvolvido neste trabalho foi o que mais se aproximou da solução analítica.

Embora o elemento proposto por Simo *et al.* tenha apresentado erro nulo para o primeiro e último passos de carga, o HiperBioCR mostrou na média erros menores. Esse

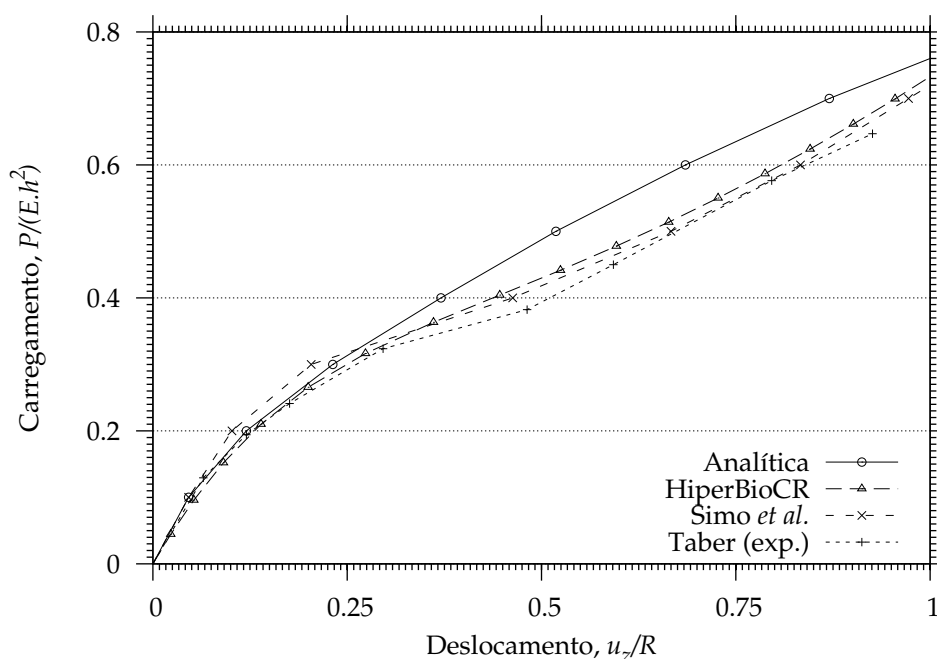


Figura 6.29: Trajetória de equilíbrio para a casca esférica submetida à uma carga concentrada em seu topo.

comportamento pode ser verificado na Tab. 6.6.

Tabela 6.6: Evolução do erro conforme o passo de carga para os diferentes modelos hiperelásticos que simulam a casca esférica.

Analítica		HiperBioCR		Simo et al.		Taber (exp.)	
Carga, $\frac{P}{Eh^2}$	$\frac{u_z}{R}$	$\frac{u_z}{R}$	Erro, %	$\frac{u_z}{R}$	Erro, %	$\frac{u_z}{R}$	Erro, %
0.100000	0.046000	0.052630	14.41	0.046000	0.00	0.064800	40.87
0.200000	0.120300	0.139223	15.73	0.101800	15.38	0.120300	0.00
0.300000	0.231400	0.273562	18.22	0.203700	11.97	0.175900	23.98
0.400000	0.370700	0.446375	20.41	0.462900	24.87	0.296200	20.10
0.500000	0.518500	0.596296	15.00	0.666600	28.56	0.481400	7.16
0.600000	0.685100	0.727200	6.15	0.833300	21.63	0.592500	13.52
0.700000	0.870300	0.845502	2.85	0.972200	11.71	0.796200	8.51
0.760000	1.000000	1.006898	0.69	1.000000	0.00	0.925900	7.41

Este exemplo foi bastante útil para avaliar a eficiência numérica do modelo hiperelástico para grandes deformações proposto, pois além da comparação ter sido feita com relação a outro modelo numérico, foi possível confrontar os resultados obtidos pelo HiperBioCR com a solução analítica do problema e com dados experimentais.

Por fim, as Figs. 6.30(a)-6.30(d) indicam as configurações deformadas para o deslocamento vertical máximo u_z sem a normalização. Portanto, os valores indicados nas barras são os deslocamentos verticais absolutos. O modelo proposto utilizou 17 passos de carga para solucionar o problema contra 10 incrementos de carga utilizados por Simo *et al.*.

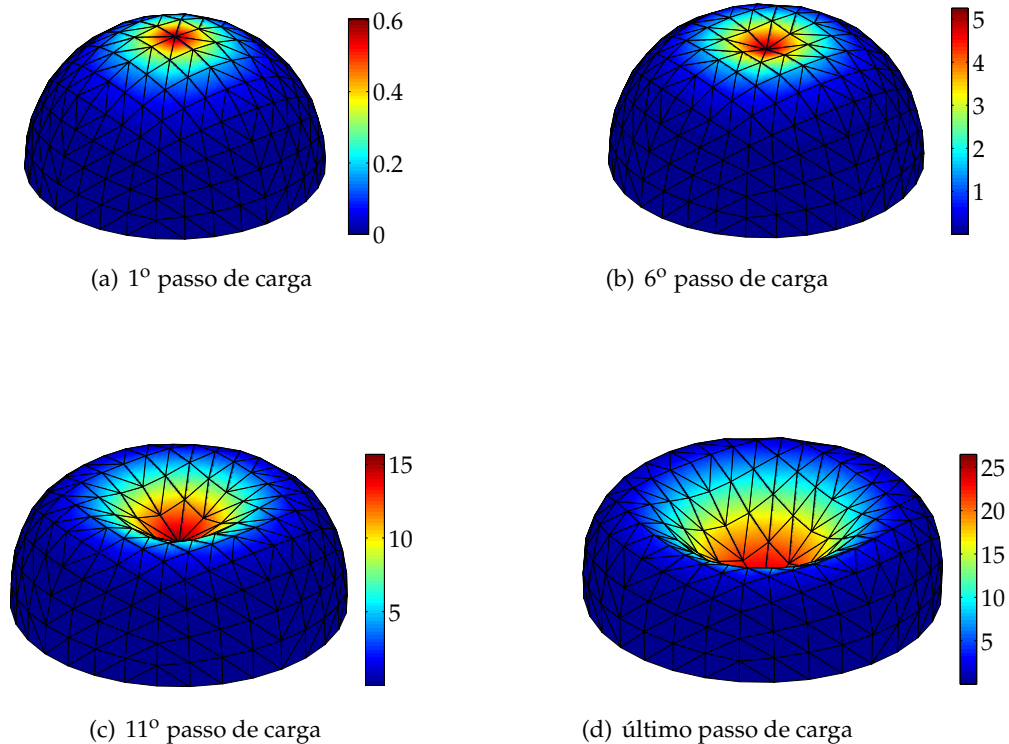


Figura 6.30: Configurações deformada da casca esférica ao longo do processo iterativo de carregamento.

Para finalizar este capítulo, a partir das soluções obtidas dos elementos HiperEngCR e HiperBioCR, é importante destacar os seguintes aspectos:

- As soluções analíticas foram implementadas a partir dos artigos escritos por Toscano e Dvorkin [101] e Simo *et al.* [90, 91, 92, 94];
- As soluções numéricas obtidas por outros autores foram obtidas de duas maneiras, a saber:
 1. Foram cedidas pelo co-orientador deste trabalho, o professor William Taylor Matias Silva, a partir de teses anteriores feitas pelos alunos do Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil da Universidade de Brasília (UnB);
 2. Obtidas a partir dos artigos utilizados para comparação através de valores tabelados ou curvas plotadas.
- As soluções apresentadas mostraram a qualidade dos elementos implementados quando comparados com outros elementos ou com soluções analíticas. Dessa forma, tanto o HiperEngCR quanto o HiperBioCR foram devidamente e amplamente **validados**;
- A ênfase aos problemas hiperelásticos não foi maior, pois as análises escolhidas foram as que mais são apresentadas na literatura para se validar elementos de casca.

Com isso, este capítulo apresentou dez exemplos numéricos bastante empregados na literatura para se avaliar um elemento de casca hiperelástico que funcionam como *benchmarking* de novos modelos propostos. Ambos os elementos propostos foram amplamente testados e avaliados e, por fim, validados com êxito.

Considerações Finais

7.1 Introdução

Esta tese apresentou uma maneira alternativa de descrição cinemática para a formulação em elementos finitos não-lineares, ou seja, utilizando a cinemática corrotacional. Inicialmente, foi realizada uma revisão teórica e bibliográfica dos modelos utilizados no estudo da análise não-linear via MEF. Foi apresentado um breve histórico sobre não-linearidade física e geométrica além da descrição cinemática corrotacional. Os objetivos, bem como as justificativas foram amplamente vistas. A questão da originalidade deste trabalho foi abordado.

No Capítulo 2, foram introduzindo aspectos teóricos importantes para o entendimento da elasticidade finita. Foi avaliado o movimento de corpo genérico no espaço e, com isso, o seu aspecto de deformação. As diferentes medidas de deformação e tensão que são inerentes às análises não-lineares foram deduzidas e detalhadas. As equações de equilíbrio foram reveladas. Por fim, foi introduzida e definida a hiperelasticidade.

O Capítulo 3 descreveu, de maneira detalhada, como é feita a implementação de um elemento finito qualquer empregando a formulação corrotacional. Conceitos básicos e preliminares para o embasamento teórico e o devido entendimento da tese foram avaliados e as matrizes específicas dessa formulação foram apresentadas genericamente, tais como os projetores-T e R ($\bar{\mathbf{P}}_u$ e $\bar{\mathbf{P}}_\omega$). As vantagens e desvantagens em se utilizar esse tipo de descrição cinemática foram amplamente discutidas.

Em seguida, o Capítulo 4 particularizou a formulação vista no Capítulo 3 para o elemento triangular de casca de 3 nós que foi utilizado nesta tese. As matrizes da formulação CR foram desenvolvidas especificamente para esse elemento, além da matriz de rigidez tangente. Todo suporte para a formulação corrotacional utilizando o elemento triangular de casca foi largamente visto e detalhado.

Após a abordagem preliminar da elasticidade finita apresentada no Capítulo 2, o

Capítulo 5 demonstrou a modelagem do problema hiperelástico particularizando para o caso da descrição cinemática corrotacional. Alguns tipos de restrições foram introduzidas no modelo. Além disso, aspectos de implementação computacional foram avaliados e desenvolvidos.

Por último, análises numéricas com os elementos formulados foram apresentadas no Capítulo 6. Os resultados foram comparados com os obtidos analiticamente e com outros modelos numéricos disponíveis na literatura. Os algoritmos propostos ao longo do trabalho foram amplamente testados para diferentes condições de geometria e carregamento.

A seção seguinte tem por objetivo apresentar as principais conclusões a respeito desta tese, bem como sugerir linhas de pesquisa para trabalhos futuros.

7.2 Conclusões

Esta tese propôs o modelamento de diversas tipologias estruturais (vigas, placas e cascas) por meio da análise via elementos finitos baseado na descrição cinemática corrotacional. O problema da hiperelasticidade foi escolhido, pois é o que apresenta a possibilidade de se modelar tanto problemas tipicamente de engenharia quanto de bioengenharia.

O modelo hiperelástico para análises de engenharia foi proposto, pois com a crescente utilização de estruturas cada vez mais esbeltas, aumenta a possibilidade de ocorrência de fenômenos de instabilidade de equilíbrio, tanto na fase pré-crítica quanto na fase posterior à perda de estabilidade (fase pós-crítica), estando a perda da capacidade portante da estrutura relacionada com a natureza da instabilidade de equilíbrio.

Para o problema da hiperelasticidade com grandes deformações, tal modelo foi selecionado devido ao fato de ser uma nova área que surge na mecânica computacional.

Ao longo deste trabalho, procurou-se enfatizar os conceitos básicos da formulação corrotacional que é baseada na decomposição dos deslocamentos totais em deslocamentos de corpo rígido e deformacional, visando estudar o comportamento de diversas estruturas planas e espaciais discretizadas com elementos finitos triangulares de casca.

A implementação computacional dos elementos foi concluída e a validação foi feita com sucesso, de acordo com a comparação com os resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura. O elemento foi implementado em uma plataforma de software criada em Fortran[®] e o pós-processamento feito em MatLab[®]. O programa em Fortran[®] foi inicialmente escrito por Carlos A. Felippa e seus colaboradores que em parceria com a Universidade de Brasília foi cedido para William Taylor Matias Silva, co-orientador deste trabalho.

As implementações complementares, ou seja, os dois modelos hiperelásticos foram escritos pelo autor da tese bem como o programa de pós-processamento para análise dos resultados. Ademais, os programas pré-processadores de geração automática de malha permitiram o estudo do comportamento destas estruturas para diferentes malhas, desde as mais

grosseiras até as mais refinadas.

Vale ressaltar que a utilização do ambiente para formulação dos elementos, HiperEngCR e HiperBioCR, permite a reutilização dos estudos desenvolvidos neste trabalho entre alunos e professores deste programa de pós-graduação em futuras pesquisas, contribuindo de maneira significativa para integração e sinergia entre as linhas de pesquisa que estão sendo desenvolvidas tanto em Boulder nos EUA por Felippa, quanto na UFSC e na UnB.

Em função dos exemplos numéricos analisados, pode-se concluir que a formulação corrotacional e a sua implementação computacional apresentaram, de uma forma geral, resultados com grande concordância em relação aos encontrados na literatura, ocorrendo apenas pequenas discrepâncias em regiões próximas de pontos críticos ou de fortes não-linearidades geométricas, caracterizadas por instabilidades do tipo: *snap-through* ou *snap-back*. Entretanto, esse fato também ocorreu nos modelos que foram utilizados como parâmetro de comparação.

Vale destacar que o conjunto de análises numéricas não contempla todos os tipos de carregamentos e condições de contorno, mas alguns dos mais importantes encontrados na literatura que servem como *benchmarking* de novos elementos finitos. Após esse conjunto de análises numéricas realizadas, as principais conclusões obtidas sobre o desempenho dos elementos finitos corrotacionais foram:

1. Nenhum dos elementos apresentou problemas de *locking* nas condições de contorno e carregamento analisadas;
2. Ambos elementos, HiperEngCR e HiperBioCR, foram capazes de representar corretamente os modos de corpo rígido e de deformação do sólido em estudo;
3. Com relação à convergência, todos os elementos apresentaram excelente aspecto de convergência. Quando o exemplo a ser avaliado possuía solução analítica, genericamente, os erros não foram maiores que 10% para as malhas mais refinadas, sendo que em alguns casos o erro ficou próximo de zero. Ainda no que se refere à convergência, alguns casos analisados mostraram que para uma malha 4×4 o resultado obtido já se mostrava satisfatório;
4. Por fim, apesar de apresentar algumas desvantagens como em estudo de problemas que envolvem grandes deformações plásticas, a formulação CR se mostrou extremamente vantajosa, pois:
 - (V1) Resolvem com eficiência problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações, com pequenas e grandes deformações, lembrando que o primeiro assunto está associado a uma grande variedade de problemas práticos de engenharia estrutural, sendo particularmente importante em estruturas aeroespaciais.

- (V2) Permite a reutilização de bibliotecas de elementos finitos lineares pré-existent, em uma análise não-linear geométrica de estruturas, em especial, se a formulação EICR for empregada.
- (V3) Facilidade em aplicar o problema da não-linearidade material, caracterizada por pequenas deformações, juntamente, com não-linearidades geométricas.
- (V4) A transformação de corpo rígido reorienta automaticamente a direção do material, desde que (V1) seja respeitada. Essa qualidade elimina a necessidade de trabalhar com as inconvenientes taxas de tensão, que são normalmente complicadas.
- (V5) Facilidade de adaptação ao estudo de elementos estruturais com graus de liberdade de rotação (vigas, placas e cascas) submetidos a grandes rotações, lembrando que tais elementos são razoavelmente complicados de serem estudados com descrições cinemáticas Lagrangeanas.

Resumindo, a descrição cinemática corrotacional vem sendo cada vez mais empregada devido à essas vantagens e também pelo fato de que a descrição Lagrangeana Total está em desuso em aplicações de Engenharia.

7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Este trabalho permitiu o conhecimento sobre a formulação de elementos triangulares de casca empregando a descrição cinemática corrotacional. O desempenho do modelo gerado foi apresentado de maneira satisfatória. Entretanto, o modelo ficou limitado às análises estáticas. Para dar continuidade a este trabalho, é interessante tentar utilizar a técnica de formulação de um elemento de casca baseado na cinemática CR para problemas dinâmicos. Outra extensão interessante, seria o desenvolvimento e a implementação levando em consideração o efeito de gradientes térmicos e a inclusão de um algoritmo para verificar problemas de contato. Uma vez que esse problema leve em consideração os multiplicadores de Lagrange, também é oportuno implementar o cálculo das tensões.

É importante salientar que o objetivo inicial da tese era de apresentar um elemento capaz de resolver problemas não-lineares para o domínio dos grandes deslocamentos e rotações, mas com pequenas deformações. Com a evolução da pesquisa, foi possível modelar um outro elemento para os deslocamentos e rotações finitas sem restrição de deformação.

Referências Bibliográficas

- [1] ABDALLA, J. E., BELO, I. M., & MACHADO, R. D. On the spurious mechanisms of an eight-node mindlin plate finite element model. In *The Ninth International Conference on Computational Structures Technology* (Atenas, 2008), vol. 1, Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology, pp. 1–21.
- [2] AGORAS, M., LOPEZ-PAMIES, O., & CASTAÑEDA, P. P. A general hyperelastic model for incompressible fiber-reinforced elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57, 2 (2009), 268–286.
- [3] ALVES, M. K., & ROSSI, R. Recovery based error estimation and adaptivity applied to a modified element-free galerkin method. *Comput. Mech.* 33, 3 (2004), 194–205.
- [4] ALVES, M. K., & ROSSI, R. An h-adaptative modified element-free galerkin method. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 24 (2005), 782–799.
- [5] ALVIN, K., DE LA FUENTE, H. M., HAUGEN, B., & FELIPPA, C. A. Membrane triangles with corner drilling freedoms–i. the eff element. *Finite Elements in Analysis and Design* 12, 3-4 (1992), 163–187.
- [6] ARCINIEGA, R., & REDDY, J. Large deformation analysis of functionally graded shells. *International Journal of Solids and Structures* 44, 6 (2007), 2036–2052. Physics and Mechanics of Advanced Materials.
- [7] ARCINIEGA, R., & REDDY, J. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 4-6 (2007), 1048–1073.
- [8] ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32, 1-3 (1982), 85–155.
- [9] BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, 2nd ed. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996.

- [10] BATTINI, J.-M. A modified corotational framework for triangular shell elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 13-16 (2007), 1905–1914.
- [11] BATTINI, J.-M. A non-linear corotational 4-node plane element. *Mechanics Research Communications* 35, 6 (2008), 408–413.
- [12] BATTINI, J.-M., & PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195, 44-47 (2006), 6362–6377.
- [13] BATTINI, J.-M., PACOSTE, C., & ERIKSSON, A. Improved minimal augmentation procedure for the direct computation of critical points. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192, 16-18 (2003), 2169–2185.
- [14] BELO, I. M., ALVES, M. K., & SILVA, W. T. M. A consistent nonlinear shell element based on a corotational formulation for hypelastic material models. In *20th International Congress of Mechanical Engineering COBEM* (Gramado, RS, Novembro 2009), Anais do 20th International Congress of Mechanical Engineering COBEM.
- [15] BELYTSCHKO, T., & HSIEH, B. J. Nonlinear transient finite element analysis with convected coordinates. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 7 (1973), 255–271.
- [16] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., & MORAN, B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*, 1st ed. John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [17] BONET, J., & WOOD, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2008.
- [18] BUCALEM, M. L., & BATHE, K.-J. Higher-order mitc general shell elements. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 36 (1993), 3729–3754.
- [19] CORTIVO, N. D. *Análise de estruturas de cascas finas utilizando-se uma formulação co-rotational, um modelo plástico por camadas e o elemento finito ANDES*. Tese de Doutorado, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília - UnB, 2004.
- [20] CORTIVO, N. D., FELIPPA, C. A., BAVESTRELLO, H., & SILVA, W. T. Plastic buckling and collapse of thin shell structures, using layered plastic modeling and co-rotational andes finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198, 5-8 (2009), 785–798.
- [21] CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 81, 2 (1990), 131–150.
- [22] CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, vol. 1: Essentials. John Wiley & Sons, 1991.

- [23] CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, vol. 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, 1997.
- [24] CRISFIELD, M. A., JELENIC, G., MI, Y., ZHONG, H. G., & FAN, Z. Some aspects of the non-linear finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design* 27, 1 (1997), 19–40. Robert J. Melosh Medal Competition.
- [25] DELALLEAU, A., JOSSE, G., LAGARDE, J. M., ZAHOUANI, H., & BERGHEAU, J. M. A nonlinear elastic behavior to identify the mechanical parameters of human skin in vivo. *Skin Research and Technology* 14 (2008), 152–164.
- [26] DERVAUX, J., CIARLETTA, P., & AMAR, M. B. Morphogenesis of thin hyperelastic plates: A constitutive theory of biological growth in the föppl-von kármán limit. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57, 3 (2009), 458–471.
- [27] DIRIDOLOU, S., BERSON, M., VABRE, V., BLACK, D., KARLSON, B., AURIOL, F., GREGOIRE, J. M., YVON, C., VAILLANT, L., GALL, Y., & PATAT, F. An in vivo method for measuring the mechanical properties of the skin using ultrasound. *Ultrasound Med. Biol.* 24, 2 (1998), 215–224.
- [28] DUPIUS, G. A., HIBBIT, H. D., MCNAMARA, S. F., & MARCAL, P. V. Non-linear material and geometric behavior of shell structures. *Computers & Structures* 1 (1971), 223–239.
- [29] FELIPPA, C., & HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, 21-24 (2005), 2285–2335. Computational Methods for Shells.
- [30] FELIPPA, C. A. A survey of parametrized variational principles and applications to computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 113, 1-2 (1994), 109–139.
- [31] FELIPPA, C. A., & ALEXANDER, S. Membrane triangles with corner drilling freedoms– iii. implementation and performance evaluation. *Finite Elements in Analysis and Design* 12, 3-4 (1992), 203–239.
- [32] FELIPPA, C. A., HAUGEN, B., & MILITELLO, C. From the individual element test to finite element templates: Evolutions of the patch test. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 38 (1995), 199–229.
- [33] FELIPPA, C. A., & MILITELLO, C. Membrane triangles with corner drilling freedoms– ii. the andes element. *Finite Elements in Analysis and Design* 12, 3-4 (1992), 189–201.
- [34] FELIPPA, C. A., & ONATE, E. Stress, strain and energy splittings for anisotropic elastic solids under volumetric constraints. *Computers & Structures* 81, 13 (2003), 1343–1357.

- [35] FU, Y., PEARCE, S., & LIU, K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43, 8 (2008), 697–706.
- [36] FUNG, Y. C. *Mechanical properties of living tissues*, second ed. ed. Springer, 1996.
- [37] GALLANGHER, R. J., GELLATLY, R. A., PADLOG, J., & MALLET, R. H. A discrete element procedure for thin shell instability analysis. *Am. Inst. Aero. & Astro. J.* 5, 1 (1967), 138–145.
- [38] HAISLER, W. E., STRICKLIN, J. H., & KEY, J. E. Displacement incrementation in nonlinear structural analysis by the self-correcting method. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 11 (1977), 3–10.
- [39] HAUGEN, B. *Buckling and stability problems for thin shell structures using high performance finite elements*. Tese de Doutorado, University of Colorado, EUA, 1994.
- [40] HELLWEG, H. B., & CRISFIELD, M. A. A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers & Structures* 66, 5 (1998), 704–709.
- [41] HOLZAPFEL, G. A., & OGDEN, R. W. On planar biaxial tests for anisotropic nonlinearly elastic solids. a continuum mechanical framework. *Mathematics and Mechanics of Solids* 14 (2009), 474–489.
- [42] HOLZAPFEL, G. A., & SIMO, J. C. Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 132, 1-2 (1996), 17–44.
- [43] HORRIGMOE, G., & BERGAN, P. G. Instability analysis of free-form shells by flat finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 16 (1978), 11–35.
- [44] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, New York, USA, 2000.
- [45] HUGHES, T. J. R., & LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 26 (1981), 331–362.
- [46] HUGHES, T. J. R., & LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part ii. two-dimensional shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 27 (1981), 167–182.
- [47] IBRAHIMBEGOVIC, A., & TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, 45 (2002), 5159–5176.
- [48] JELENIC, G., & CRISFIELD, M. A. Geometrically exact 3d beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 171, 1-2 (1999), 141–171.

- [49] JELENIC, G., & CRISFIELD, M. A. Dynamic analysis of 3d beams with joints in presence of large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, 32-33 (2001), 4195–4230.
- [50] KANNER, L. M., & HORGAN, C. O. Inhomogeneous shearing of strain-stiffening rubber-like hollow circular cylinders. *International Journal of Solids and Structures* 45, 20 (2008), 5464–5482.
- [51] KAPUR, W. W., & HARTZ, B. J. Stability of plates using the finite element method. *J. Engrg. Mech.* 92 (1966), 177–195.
- [52] KAUER, M. *Inverse finite element characterization of soft tissues with aspiration experiments*. Tese de Doutorado, Swiss Federal Institute of Technology. 143p, 2001.
- [53] KHATYR, F., IMBERDIS, C., VESCOVO, P., VARCHON, D., & LAGARDE, J. M. Model of the viscoelastic behaviour os skin in vivo and study of anisotropy. *Skin Research and Technology* 10, 2 (2004), 96–103.
- [54] KHOSRAVI, P., GANESAN, R., & SEDAGHATI, R. An efficient facet shell element for co-rotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures. *Computers & Structures* 86, 9 (2008), 850–858. Composites.
- [55] KIM, D.-N., & BATHE, K.-J. A 4-node 3d-shell element to model shell surface tractions and incompressible behavior. *Computers & Structures* 86, 21-22 (2008), 2027–2041.
- [56] KIM, K.-D., HAN, S.-C., & SUTHASUPRADIT, S. Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42, 6 (2007), 864–881.
- [57] KIM, K.-D., LEE, C.-S., & HAN, S.-C. A 4-node co-rotational ans shell element for laminated composite structures. *Composite Structures* 80, 2 (2007), 234–252.
- [58] KLINKEL, S., GRUTTMANN, F., & WAGNER, W. A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195, 1-3 (2006), 179–201.
- [59] LI, M. The finite deformation theory for beam, plate and shell part i. the two-dimensional beam theory. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 146, 1-2 (1997), 53–63.
- [60] LI, M. The finite deformation of beam, plate and shell structures part ii. the kinematic model and the green-lagrangian strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 156, 1-4 (1998), 247–257.

- [61] LI, M. The finite deformation theory for beam, plate and shell part iii. the three-dimensional beam theory and the fe formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 162, 1-4 (1998), 287–300.
- [62] LI, M., & ZHAN, F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. part iv. the fe formulation of mindlin plate and shell based on green-lagrangian strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 182, 1-2 (2000), 187–203.
- [63] LI, M., & ZHAN, F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. part v. the shell element with drilling degree of freedom based on biot strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 189, 3 (2000), 743–759.
- [64] LUO, A. C. J. An approximate theory for geometrically nonlinear thin plates. *International Journal of Solids and Structures* 37, 51 (2000), 7655–7670.
- [65] MACNEAL, R. H. A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures* 8, 2 (1978), 175–183.
- [66] MACNEAL, R. H. Perspective on finite elements for shell analysis. *Finite Elements in Analysis and Design* 30, 3 (1998), 175–186.
- [67] MACNEAL, R. H., WILSON, C. T., HARDER, R. L., & HOFF, C. C. The treatment of shell normals in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design* 30, 3 (1998), 235–242.
- [68] MILITELLO, C., & FELIPPA, C. A. The first andes elements: 9-dof plate bending triangles. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 93, 2 (1991), 217–246.
- [69] MURRAY, D. W., & WILSON, E. L. Finite element post-buckling analysis of thin elastic plates. *AIAA* 7 (1969), 1915–1930.
- [70] NOELS, L., & RADOVITZKY, R. A new discontinuous galerkin method for kirchhoff-love shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197, 33-40 (2008), 2901–2929.
- [71] NOUR-OMID, B., & RANKIN, C. C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 93 (1991), 353–384.
- [72] ODEN, J. T. Numerical formulation of non-linear elasticity problems. *J. Struct. Div* 93 (1967), artigo 5290.
- [73] OKSTAD, K. M., & MATHISEN, K. Towards automatic adaptative geometrically non-linear shell analysis. part i: Implementation of an h-adaptative mesh refinement procedure. *Int. J. Numer. Methods. Engrg.* 37 (1994), 2567–2578.

- [74] PACOSTE, C. Co-rotational flat facet triangular elements for shell instability analyses. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 156, 1-4 (1998), 75–110.
- [75] PACOSTE, C., & ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 144, 1-2 (1997), 163–197.
- [76] PERIC, D., HOCHARD, C., DUTKO, M., & OWEN, D. R. J. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 137, 3-4 (1996), 331–344.
- [77] PERIC, D., OWEN, D. R. J., & HONNOR, M. E. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 94, 1 (1992), 35–61.
- [78] PERIC, D., VAZ, M., JR., & OWEN, D. On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 176, 1-4 (1999), 279–312.
- [79] PETROV, E., & GÉRADIN, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 1: Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165, 1-4 (1998), 43–92.
- [80] PETROV, E., & GÉRADIN, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids part 2: Anisotropic and advanced beam models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 165, 1-4 (1998), 93–127.
- [81] RANKIN, C. C. Consistent linearization of the element-independent corotational formulation for the structural analysis of general shells. Tech. rep., NASA Contractor Report 278428, Lockheed Palo Alto Res. Lab., CA, 1988.
- [82] RANKIN, C. C., & BROGAN, F. A. An element-independent corotational procedure for the treatment of large rotations. *ASME J. Pressure Vessel Technology* 108 (1986), 165–174.
- [83] RANKIN, C. C., & NOUR-OMIDE, B. The use of projectors to improve finite element performance. *Computers & Structures* 30 (1988), 257–267.
- [84] REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [85] REDDY, J. N. *An Introduction to Continuum Mechanics with Applications*. Cambridge University Press, 2008.
- [86] ROSSI, R. *Proposições e aplicações considerando o método de galerkin livre de elementos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 2005.

- [87] ROSSI, R., & ALVES, M. K. On the analysis of an efg method under large deformations and volumetric locking. *Comput. Mech.* 39 (2007), 381–399.
- [88] SABIR, A. B., & DJOUDI, M. S. Shallow shell finite element for the large deflection geometrically nonlinear analysis of shells and plates. *Thin-Walled Structures* 21, 3 (1995), 253–267. Finite Elements for Thin-Walled Structures.
- [89] SASSO, M., PALMIERI, G., CHIAPPINI, G., & AMODIO, D. Characterization of hyperelastic rubber-like materials by biaxial and uniaxial stretching tests based on optical methods. *Polymer Testing* 27, 8 (2008), 995–1004.
- [90] SIMO, J. C., & FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 72, 3 (1989), 267–304.
- [91] SIMO, J. C., FOX, D. D., & RIFAI, M. S. On a stress resultant geometrically exact shell model. part ii: The linear theory; computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 73, 1 (1989), 53–92.
- [92] SIMO, J. C., FOX, D. D., & RIFAI, M. S. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iii: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 79, 1 (1990), 21–70.
- [93] SIMO, J. C., & HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.
- [94] SIMO, J. C., RIFAI, M. S., & FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part iv: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 81, 1 (1990), 91–126.
- [95] SIMO, J. C., & VU-QUOC, L. A three-dimensional finite strain rod model. part ii: Computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 58 (1986), 79–116.
- [96] SIMONS, J., BERGAN, P. G., & NYGARD, M. K. Hyperplane displacement control methods in nonlinear analysis. *Innovative Methods for Nonlinear Problems* (1984), 345–364.
- [97] SKALLERUD, B., & HAUGEN, B. Collapse of thin shell structures - stress resultant plasticity modelling within a co-rotated andes finite element formulation. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 46 (1999), 1961–1986.
- [98] STANDER, N., MATZENMILLER, A., & RAMM, E. An assesment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Engineering Computers* 6 (1989), 58–66.
- [99] SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), 582–615.

- [100] TABER, L. A. Large deflection of a large fluid filled spherical shell under a point load. *Journal of Applied Mechanics* 49 (1982), 121–128.
- [101] TOSCANO, R. G., & DVORKIN, E. N. A shell element for finite strain analyses: hyperelastic material models. *Int. J. for Computer-Aided Engineering and Software* 24, 5 (2007), 514–535.
- [102] TRUESDELL, C. Hypoelasticity. *J. Ration. Mech.* 4 (1955), 83–133.
- [103] TURNER, M. J., DILL, E. H., MARTIN, H. C., & MELOSH, R. J. Large deflection of structures subject to heating and external load. *J. Aero. Sci.* 27 (1960), 97–106.
- [104] VEUBEKE, B. F. D. The dynamics of flexible bodies. *International Journal of Engineering Science* 14, 10 (1976), 895–913.
- [105] VEUBEKE, B. M. F. D., & MILLARD, A. Discretization of stress fields in the finite element method. *Journal of the Franklin Institute* 302, 5-6 (1976), 389–412.
- [106] VOYIADJIS, G. Z., & WOELKE, P. A refined theory for thick spherical shells. *International Journal of Solids and Structures* 41, 14 (2004), 3747–3769.
- [107] VOYIADJIS, G. Z., & WOELKE, P. General non-linear finite element analysis of thick plates and shells. *International Journal of Solids and Structures* 43, 7-8 (2006), 2209–2242.
- [108] VU-QUOC, L., DENG, H., & TAN, X. G. Geometrically-exact sandwich shells: The static case. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 189, 1 (2000), 167–203.
- [109] VU-QUOC, L., DENG, H., & TAN, X. G. Geometrically exact sandwich shells: The dynamic case. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, 22-23 (2001), 2825–2873.
- [110] WAGNER, W., KLINKEL, S., & GRUTTMANN, F. Elastic and plastic analysis of thin-walled structures using improved hexahedral elements. *Computers & Structures* 80, 9-10 (2002), 857–869.
- [111] WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures* 5, 2 (1969), 117–153.
- [112] WEMPNER, G., & TALASLIDIS, D. *Mechanics of solids and shells: theories and approximations*. CRC Press, 2003.
- [113] WRIGGERS, P. *Nonlinear Finite Elements Methods*. Springer, 2008.
- [114] YAMADA, Y., YOSHIMURA, N., & SAKURAI, T. Plastic stress-strain and its application for the solution of elasto-plastic problems by the finite element method. *Int. J. Mech. Sci.* 10 (1968), 343–354.

- [115] YANG, Y., LIN, S., & CHEN, C. Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3d frames, plates and shells based on the updated lagrangian formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 7 (2007), 1178–1192.
- [116] ZIENKIEWICZ, O. C. Incremental displacement in nonlinear analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 3 (1973), 587–592.
- [117] ZIENKIEWICZ, O. C., & TAYLOR, R. L. *The finite element method*, 5th ed., vol. 1: The basis. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [118] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., & TOO, J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 3 (1971), 275–290.
- [119] ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPAN, S., & KING, I. P. Elasto-plastic solutions of engineering problems, initial stress, finite element approach. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 1 (1969), 75–100.

Rotação Finita, Aspectos Matemáticos

A.1 Introdução

O objetivo deste texto é fornecer um sumário das equações e dos resultados provenientes do tratamento matemático dado às rotações finitas no espaço tri-dimensional.

A.2 Rotação Espacial \times Plana

A rotação plana é definida por um escalar: o ângulo de rotação θ em torno do eixo z . Além disso, ela é comutável, ou seja, $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$. Isto porque os ângulos θ representam números. Portanto, é um tópico simples. Por outro lado, a rotação espacial é mais complexa, pois envolve o entendimento e domínio do teorema fundamental de Euler, a saber:

Teorema 1. *O movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo que passa sobre aquele ponto.*

Conseqüentemente, a rotação 3D tem duas magnitudes: o ângulo de rotação e a direção do eixo de rotação. Nominalmente, isto é o mesmo atributo que categoriza os vetores. Dessa forma, as rotações são freqüentemente descritas como vetores, mas com dupla flecha.

A rotação espacial finita não obedece às leis do cálculo vetorial assim como a rotação infinitesimal. Diferentemente da rotação plana, a rotação espacial não é comutativa. Com isso, duas rotações suscecivas não produzem a mesma resposta, ao menos que o eixo de rotação seja mantido fixo. No contexto da álgebra matricial, as rotações finitas podem ser representadas por matrizes reais ortogonais 3×3 , chamadas de *matriz rotação*, \mathbf{R} ; ou como matrizes antissimétricas, $\mathbf{\Omega}$, chamadas de *matriz de giro*.

Agora, uma matriz antissimétrica 3×3 é definida por três escalares. Esses parâmetros podem ser arranjados como componentes de um *vetor axial* ω . Embora ω se pareça com um vetor, ele não obedece à certas propriedades vetoriais clássicas, por isso, muitas vezes

ele é chamado de *pseudo-vetor*.

A representação do giro é importante no ponto de vista do modelamento físico e da derivação teórica, pois os valores de entrada da matriz estão relacionados com ambos atributos vistos anteriormente. Já a representação da matriz rotação é importante no que diz respeito ao aspecto numérico e computacional. A Fig. A.1 ilustra as várias transformações que relacionam essas duas matrizes.



Figura A.1: Representação das rotações espaciais finitas e das operações de mapeamento.

Tanto o vetor axial como a matriz de giro apresentadas na Fig. A.1 podem ser ajustadas por um fator de escala γ , porém a matriz rotação é única. O intuito de apresentar este tópico foi de mostrar como a rotação finita e a matemática estão intimamente ligadas aos problemas de engenharia.

A.3 Giros

A figura A.2 descreve uma rotação 3D no espaço (x_1, x_2, x_3) dada por um ângulo θ sobre um eixo de rotação ω . Por conveniência, a origem do sistema coordenado, O , foi colocado em ω . O eixo de rotação é definido pelas componentes: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; no mínimo um deles deve ser não nulo. Como esses números podem ser obtidos a partir de um fator de escala γ , o vetor ω pode ser normalizado conforme será discutido adiante. O sentido positivo de θ obedece à regra da mão direita.

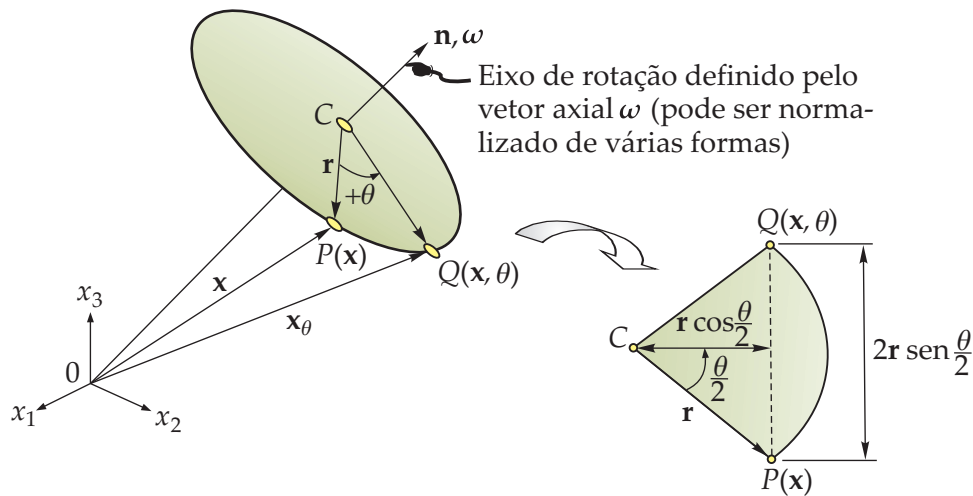


Figura A.2: Atributos da rotação em 3D.

A rotação de um ponto arbitrário $P(\mathbf{x})$ é dada pelo vetor posição \mathbf{x} através de $Q(\mathbf{x}, \theta)$, localizado pelo vetor posição \mathbf{x}_θ . O centro de rotação C é obtido a partir da projeção de P sobre o eixo de rotação. O plano de rotação definido por CPQ é normal ao eixo em C . O raio de rotação dado pelo vetor \mathbf{r} , de magnitude r , é obtido unindo C a P . Como ilustra a Fig. A.2, a distância entre P e Q é dada por $2r \sin \frac{\theta}{2}$.

A.3.1 Matriz de Giro e Vetor Axial

Dada as três direções ω_1, ω_2 e ω_3 do eixo $\boldsymbol{\omega}$, pode-se associar esses valores a uma matriz antissimétrica 3×3 por:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{Rot}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{\Omega}^T \quad (\text{A.3.1})$$

Pré-multiplicando um vetor \mathbf{v} por $\boldsymbol{\Omega}$ é equivalente ao produto externo de $\boldsymbol{\omega}$ por \mathbf{v} , isto é:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.3.2})$$

A operação oposta de (A.3.1) extrai as três componentes do tensor de giro que compõem o vetor axial,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.3})$$

O comprimento do vetor é dado por:

$$\omega = \|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \quad (\text{A.3.4})$$

A regra geral da notação da matriz de giro e do vetor axial é representada pelo símbolo maiúsculo e seu respectivo minúsculo. Por exemplo: \mathbf{N} e \mathbf{n} , \mathbf{Z} e \mathbf{z} , $\boldsymbol{\Theta}$ e $\boldsymbol{\theta}$.

Observação A.1. Algumas exceções são feitas para que não ocorra conflito na notação.

A.3.2 Normalização da Matriz de Giro

Como já foi mencionado, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}$ podem ser multiplicados por um fator de escala γ para obter várias normalizações. Genericamente, γ tem a forma de $g(\theta)/\omega$, onde $g(\cdot)$ representa uma função da rotação angular θ . O objetivo da normalização é simplificar a relação de $\text{Rot}(\cdot)$ e $\text{Anti}(\cdot)$ com a matriz de rotação, a fim de evitar singularidades no caso de ângulos especiais e associar as componentes ω_1, ω_2 e ω_3 com a amplitude da rotação. Esta seção tem a finalidade de apresentar algumas das normalizações mais utilizadas na prática.

Dado $\gamma = 1/\omega$, obtém-se o vetor axial unitário e um giro unitário dados por \mathbf{n} e \mathbf{N} , respectivamente:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1/\omega \\ \omega_2/\omega \\ \omega_3/\omega \end{bmatrix} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \quad (\text{A.3.5})$$

e

$$\mathbf{N} = \text{Rot}(\mathbf{n}) = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

Se $\gamma = \tan \frac{\theta}{2}/\omega$, é equivalente a multiplicar n_i por $\tan \frac{\theta}{2}$. Com isso, tem-se os chamados *parâmetros de Rodrigues* $b_i = n_i \tan \frac{\theta}{2}$ para $i = 1, 2$ e 3 . Esses valores são reunidos no vetor axial de Rodrigues, \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \omega_1/\omega \\ \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \omega_2/\omega \\ \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \omega_3/\omega \end{bmatrix} = \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) / \omega \right] \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.3.7})$$

A Eq. (A.3.8) associa esse vetor ao tensor $\boldsymbol{\Sigma}$ por:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{Rot}(\mathbf{b}) = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathbf{N} = \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) / \omega \right] \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A.3.8})$$

Essa representação permite uma formulação elegante das rotações por meio de transformações. Entretanto, observando as expressões (A.3.7) e (A.3.8), percebe-se que ocorre um problema quando θ se aproxima de 180° uma vez que $\tan \frac{\theta}{2} \rightarrow \pm\infty$. Uma maneira de evitar a singularidade é através do uso dos quatro parâmetros de Euler-Rodrigues, também denominados de *coeficientes quaternários*:

$$p_0 = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.3.9a})$$

$$p_i = n_i \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{\omega_i}{\omega} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.3.9b})$$

sob a restrição de $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$. A Eq. (A.3.9) é empregada principalmente para solução de problemas dinâmicos, de robótica e controle. Contudo, além de utilizar um parâmetro a mais, o que aumenta o custo computacional, a restrição é um outro problema que deve ser levado em conta.

Para resolver isso, De Veubeke [104] introduziu uma normalização livre de singularidade por meio de $\gamma = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) / \omega$. Esse procedimento é análogo a utilizar apenas a

Eq. (A.3.9b), ou seja:

$$\mathbf{p} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} = \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) / \omega\right] \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.3.10})$$

e,

$$\mathbf{P} = \text{Rot}(\mathbf{p}) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{N} = \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) / \omega\right] \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A.3.11})$$

Finalmente, uma normalização importante que mantém os três parâmetros enquanto impede a singularidade está na associação com o mapeamento exponencial. Para isso, introduz-se o *vetor rotação* $\boldsymbol{\theta}$ definido por,

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{n} = \frac{\theta}{\omega} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.3.12})$$

analogamente,

$$\boldsymbol{\Theta} = \text{Rot}(\boldsymbol{\theta}) = \theta \mathbf{N} = \frac{\theta}{\omega} \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A.3.13})$$

Para essa normalização o ângulo é o comprimento do vetor rotação, isto é:

$$\theta = \|\boldsymbol{\theta}\| = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad (\text{A.3.14})$$

O sinal positivo ou negativo é uma questão de convenção.

A.3.3 Propriedades Espectrais

O estudo do autosistema de giro ($\boldsymbol{\Omega} \mathbf{z}_i = \lambda_i \mathbf{z}_i$) é importante por alguns aspectos, começando pela determinação da equação característica:

$$\det(\boldsymbol{\Omega} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 - \omega^2 \lambda = 0 \quad (\text{A.3.15})$$

onde \mathbf{I} se refere à matriz identidade de terceira ordem. O resultado dos autovalores de $\boldsymbol{\Omega}$ são: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_{2,3} = \pm \omega i$. Consequentemente, $\boldsymbol{\Omega}$ é singular com posto 2 se $\omega \neq 0$, ao passo que se $\omega = 0$, $\boldsymbol{\Omega}$ é nulo.

Os autovalores são obtidos a partir da matriz diagonal $\Lambda = \text{diag}(0, \omega i, -\omega i)$ e os correspondentes autovetores, \mathbf{z}_i , nas colunas de $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3]$. Portanto, $\boldsymbol{\Omega} \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \Lambda$. Uma expressão simétrica-cíclica de \mathbf{Z} , obtida utilizando o programa computacional Mathematica[®], é:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1 s - \omega^2 + i(\omega_2 - \omega_3)\omega & \omega_1 s - \omega^2 - i(\omega_2 - \omega_3)\omega \\ \omega_2 & \omega_2 s - \omega^2 + i(\omega_3 - \omega_1)\omega & \omega_2 s - \omega^2 - i(\omega_3 - \omega_1)\omega \\ \omega_3 & \omega_3 s - \omega^2 + i(\omega_1 - \omega_2)\omega & \omega_3 s - \omega^2 - i(\omega_1 - \omega_2)\omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.16})$$

em que $s = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. A sua inversa é,

$$\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \omega_1 & -\frac{1}{2} \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{\omega_1 s - \omega^2 - i(\omega_2 - \omega_3)\omega} & -\frac{1}{2} \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{\omega_1 s - \omega^2 + i(\omega_2 - \omega_3)\omega} \\ \omega_2 & -\frac{1}{2} \frac{\omega_3^2 + \omega_1^2}{\omega_2 s - \omega^2 - i(\omega_3 - \omega_1)\omega} & -\frac{1}{2} \frac{\omega_3^2 + \omega_1^2}{\omega_2 s - \omega^2 + i(\omega_3 - \omega_1)\omega} \\ \omega_3 & -\frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3 s - \omega^2 - i(\omega_1 - \omega_2)\omega} & -\frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3 s - \omega^2 + i(\omega_1 - \omega_2)\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.17})$$

A parte real e imaginária dos autovetores \mathbf{z}_2 e \mathbf{z}_3 são ortogonais. Essa é uma propriedade geral de matrizes skewsimétricas.

Devido aos autovalores de $\mathbf{\Omega}$ serem distintos quando $\omega \neq 0$, uma função matricial arbitrária $\mathbf{F}(\mathbf{\Omega})$ pode ser explicitamente obtida como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(\omega i) & 0 \\ 0 & 0 & f(-\omega i) \end{bmatrix} \mathbf{Z}^{-1} \quad (\text{A.3.18})$$

sendo $f(\cdot)$ a versão escalar de $\mathbf{F}(\cdot)$. Uma aplicação importante da Eq. (A.3.18) é na matriz exponencial: $f(\cdot) \rightarrow e^{(\cdot)}$.

O quadrado de $\mathbf{\Omega}$ computado pela multiplicação direta é dado por:

$$\mathbf{\Omega}^2 = - \begin{bmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1 \omega_2 & -\omega_1 \omega_3 \\ -\omega_1 \omega_2 & \omega_3^2 + \omega_1^2 & -\omega_2 \omega_3 \\ -\omega_1 \omega_3 & -\omega_2 \omega_3 & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix} = \omega \omega^T - \omega^2 \mathbf{I} = \omega^2 (\mathbf{nn}^T - \mathbf{I}) \quad (\text{A.3.19})$$

Esta é uma matriz simétrica de traço $-2\omega^2$, cujos autovalores são: 0, $-\omega^2$ e $-\omega^2$. Pelo teorema de Cayley-Hamilton, $\mathbf{\Omega}$ satisfaz a sua própria equação característica (A.3.15):

$$\mathbf{\Omega}^3 = -\omega^2 \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega}^4 = -\omega^2 \mathbf{\Omega}^2, \dots \quad \text{de forma geral} \quad \mathbf{\Omega}^n = -\omega^2 \mathbf{\Omega}^{n-2}, \quad n \geq 3 \quad (\text{A.3.20})$$

Portanto, se $n = 3, 5, \dots$, $\mathbf{\Omega}^n$ é antissimétrica com autovalores imaginários distintos. Por outro lado, quando $n = 4, 6, \dots$, $\mathbf{\Omega}^n$ é simétrica com autovalores reais repetidos.

Os autovalores de $\mathbf{I} + \gamma \mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{I} - \gamma \mathbf{\Omega}$ são $(1, 1 \pm \gamma \omega i)$ e $(-1, 1 \pm \gamma \omega i)$, respectivamente. Com isso, essas duas matrizes têm a sua não singularidade garantidas. Isso tem implicações na transformada de Cayley.

A.4 Da Matriz Giro para a Matriz Rotação

Voltando a Fig. A.2, a matriz rotação é um operador que mapeia um ponto genérico $P(\mathbf{x})$ para $Q(\mathbf{x}_\theta)$, dados o eixo de rotação ω e o ângulo θ . Dessa forma, define-se:

$$\mathbf{x}_\theta = \mathbf{R} \mathbf{x} \quad (\text{A.4.1})$$

Essa matriz 3×3 é ortogonal, ou seja, $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ e o $\det(\mathbf{R}) = +1$. Portanto, deve ser reduzida a \mathbf{I} se não houver rotação. Outro importante atributo está no traço da matriz, dado por:

$$\text{tr}(\mathbf{R}) = 1 + 2 \cos \theta \quad (\text{A.4.2})$$

O problema considerado nesta seção é construir \mathbf{R} a partir dos dados de rotação. O problema inverso: dado \mathbf{R} , obter ω e θ , é tratado na seção seguinte. Agora, assumindo que \mathbf{R} seja analítico em Ω , deve-se expandir \mathbf{R} em série de Taylor $\mathbf{R} = \mathbf{I} + c_1\Omega + c_2\Omega^2 + c_3\Omega^3 + \dots$, sendo que todos os coeficientes c_i devem desaparecer se não existir rotação ($\theta = 0$). Mas aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, Eq. (A.3.20), os termos de ordem superior a 3 devem ser eliminados e, portanto, \mathbf{R} será função linear de \mathbf{I} , Ω e Ω^2 . Por conveniência isso será escrito como,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \alpha(\gamma\Omega) + \beta(\gamma\Omega)^2 \quad (\text{A.4.3})$$

onde γ é o fator de escala que já foi discutido e α e β são funções escalares de θ e dos invariantes de Ω ou ω . Como o invariante do último é ω , tem-se que $\alpha = \alpha(\theta, \omega)$ e $\beta = \beta(\theta, \omega)$, e ambos valores desaparecem se $\theta = 0$. A Tab. A.1 sumariza as principais representações das rotações em termos do giro Ω .

Tabela A.1: Comparação dos valores de deslocamento máximo para a casca cilíndrica.

Parametrização	γ	α	β	Giro	Rotação \mathbf{R}
Nenhuma	1	$\frac{\sin \theta}{\omega}$	$\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega^2}$	Ω	$\mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\omega}\Omega + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega^2}\Omega^2$
Vetor axial unitário	$\frac{1}{\omega}$	$\sin \theta$	$2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$	$\mathbf{N} = \gamma\Omega$	$\mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{N} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{N}^2$
Rodrigues-Cayley	$\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\omega}$	$2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$	$2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$	$\Sigma = \gamma\Omega$	$\mathbf{I} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\Sigma + \Sigma^2)$
De Veubeke	$\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\omega}$	$2 \cos \frac{\theta}{2}$	2	$\mathbf{P} = \gamma\Omega$	$\mathbf{I} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{P} + 2 \mathbf{P}^2$
Mapa exponencial	$\frac{\theta}{\omega}$	$\frac{\sin \theta}{\theta}$	$\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2}$	$\Theta = \gamma\Omega$	$\mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \Theta + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \Theta^2 = e^\Theta$

Fonte: C.A. Felippa e B. Haugen. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005), 2285–2335.

A seguir, serão discutidas duas técnicas para determinar esses coeficientes para o caso particular de $\gamma = 1$.

A.4.1 Abordagem Algébrica

Esta abordagem encontra α e β para $\gamma = 1$ (com giro sem fator de escala) diretamente das condições algébricas. Pegando o traço da Eq. (A.4.3) e aplicando a propriedade dada pela expressão (A.4.2) produz,

$$3 - 2\beta\omega^2 = 1 + 2 \cos \theta \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1 - \cos \theta}{\omega^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega^2} \quad (\text{A.4.4})$$

Da condição de ortogonalidade vem:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathbf{R}^T \mathbf{R} = (\mathbf{I} - \alpha \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega}^2)(\mathbf{I} + \alpha \boldsymbol{\Omega} + \beta \boldsymbol{\Omega}^2) \\ &= \mathbf{I} + (2\beta - \alpha^2) \boldsymbol{\Omega}^2 + \beta^2 \boldsymbol{\Omega}^4 = \mathbf{I} + (2\beta - \alpha^2 - \beta^2 \omega^2) \boldsymbol{\Omega}^2\end{aligned}\quad (\text{A.4.5})$$

o que conduz à:

$$2\beta - \alpha^2 - \beta^2 \omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\sin \theta}{\omega} \quad (\text{A.4.6})$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\omega} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1 - \cos \theta}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega}^2 = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\omega} \boldsymbol{\Omega} + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (\text{A.4.7})$$

Do ponto de vista computacional, é preferível trabalhar com o seno ao quadrado para ângulos pequenos do que $1 - \cos \theta$, a fim de impedir o cancelamento da expressão. Recolocando os componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}^2$, chega-se à forma explícita da matriz de rotação:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \omega_1^2 + (\omega_2^2 + \omega_3^2) \cos \theta & 2\omega_1 \omega_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \omega_3 \omega \sin \theta & 2\omega_1 \omega_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \omega_2 \omega \sin \theta \\ 2\omega_1 \omega_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \omega_3 \omega \sin \theta & \omega_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_3^2) \cos \theta & 2\omega_2 \omega_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \omega_1 \omega \sin \theta \\ 2\omega_1 \omega_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \omega_2 \omega \sin \theta & 2\omega_2 \omega_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \omega_1 \omega \sin \theta & \omega_3^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.8})$$

Esta expressão é invariante ao fator de escala de ω_i , e assim sendo, a Eq. (A.4.8) é única.

A.4.2 Abordagem Geométrica

A representação vetorial do movimento de corpo rígido descrito na Fig. A.2 é dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta &= \mathbf{x} \cos \theta + (\mathbf{n} \times \mathbf{x}) \sin \theta + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos \theta) \\ &= \mathbf{x} + (\mathbf{n} \times \mathbf{x}) \sin \theta + [(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{x}))](1 - \cos \theta)\end{aligned}\quad (\text{A.4.9})$$

onde \mathbf{n} é ω normalizado como aparece em (A.3.12). Isto pode ser disposto na forma matricial substituindo $\mathbf{n} \times \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{N}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}/\omega$ e $\mathbf{x}_\theta = \mathbf{R}\mathbf{x}$. Cancelando \mathbf{x} , volta-se para Eq. (A.4.7).

A.5 Matriz de Rotação para Diversas Parametrizações

Se $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor unitário normalizado de \mathbf{n} como descrito na Eq. (A.3.5), $\gamma = 1/\omega$ e $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{N} + (1 - \cos \theta) \mathbf{N}^2$. Esta é a forma matricial de (A.4.8), porque $\mathbf{N}^2 = \mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}$. Ocasionalmente, uma variação útil é dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^T \quad (\text{A.5.1})$$

com,

$$\mathbf{W} = \cos \theta \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{N} \quad (\text{A.5.2})$$

Em termos dos três parâmetros b_i de Rodrigues-Cayley introduzidos pela expressão (A.3.7), $\alpha = \beta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}^2)$. Isto pode ser explicitamente trabalhado por,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \begin{bmatrix} 1 + b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 & 2(b_1 b_2 - b_3) & 2(b_1 b_3 + b_2) \\ 2(b_1 b_2 + b_3) & 1 - b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 & 2(b_2 b_3 - b_1) \\ 2(b_1 b_3 - b_2) & 2(b_2 b_3 + b_1) & 1 - b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.3})$$

Esta forma foi obtida por Rodrigues e utilizada por Cayley no estudo do movimento de corpo rígido. Ela tem a vantagem de ser obtida por meio de expressões matriciais algébricas: a Transformada de Cayley, como será descrito na seção seguinte. Isto se torna indeterminável, uma vez que todos os termos se aproximam de 0/0 para $\theta \rightarrow 180^\circ$. Esta indeterminação é convenientemente evitada utilizando os quatro parâmetros de Euler-Rodrigues descritos na seção A.3.2 e definidos pela Eq. (A.3.9). Em termos desses parâmetros a matriz de rotação fica da seguinte forma,

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} p_0^2 + p_1^2 - \frac{1}{2} & p_1 p_2 - p_0 p_3 & p_1 p_3 + p_0 p_2 \\ p_1 p_2 + p_0 p_3 & p_0^2 + p_2^2 - \frac{1}{2} & p_2 p_3 - p_0 p_1 \\ p_1 p_3 - p_0 p_2 & p_2 p_3 + p_0 p_1 & p_0^2 + p_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.4})$$

Este tensor tem a vantagem de não se tornar singular, mas o preço disto está na inconveniente restrição $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, além de ter um parâmetro a mais.

A.6 A Transformada de Cayley

Dada uma matriz antissimétrica real $\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\Sigma}^T$, pode-se aplicar a transformação:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \quad (\text{A.6.1})$$

\mathbf{Q} é convenientemente uma matriz ortogonal cujo determinante é +1. Isto foi exposto por Gantmacher [?], mas sem a prova. Aqui está a prova da ortogonalidade:

$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})^{-1} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma})^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{I}$, pois $\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}$ e $\mathbf{I} - \boldsymbol{\Sigma}$ comutam. A propriedade de que $\det \mathbf{Q} = +1$ pode ser provado a partir das propriedades espectrais. A transformação inversa é dada por,

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\mathbf{Q} - \mathbf{I})(\mathbf{Q} + \mathbf{I})^{-1} \quad (\text{A.6.2})$$

que produz matrizes antissimétricas a partir da matriz ortogonal original \mathbf{Q} . As Eqs. (A.6.1) e

(A.6.2) são chamadas de *transformadas de Cayley*. Essas expressões são úteis para a construção de aproximações para rotações moderadas.

A.7 Mapa Exponencial

Esta é a representação final de \mathbf{R} que tem grande importância prática e teórica. Dada uma matriz antissimétrica real $\mathbf{\Sigma}$, a matriz exponencial será:

$$\mathbf{Q} = e^{\mathbf{W}} = \text{Exp}(\mathbf{W}) \quad (\text{A.7.1})$$

cuja propriedade de ortogonalidade é mantida. Prova: $\mathbf{Q}^T = \text{Exp}(\mathbf{W}^T) = \text{Exp}(-\mathbf{W}) = \mathbf{Q}^{-1}$. Se os autovalores de \mathbf{W} são dados por λ_i , então $\sum_i \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{W}) = 0$. Os autovalores de \mathbf{Q} são $\mu_i = \text{Exp}(\lambda_i)$; com isso, $\det(\mathbf{Q}) = \prod_i \mu_i = \text{Exp}(\sum_i \lambda_i) = \text{Exp}(0) = +1$. A transformação dada pela Eq. (A.7.1) é chamada de *mapa exponencial*. O inverso é obtido por $\mathbf{W} = \log_e(\mathbf{Q})$.

Uma questão interessante que surge é a seguinte: como colocar um fator de escala $\gamma = \gamma(\theta, \omega)$ na rotação, ou seja, $\mathbf{R} = \text{Exp}(\gamma\mathbf{\Omega})$? Para avaliar essa questão, é necessário explorar a forma exponencial. Isso pode ser obtido a partir da Eq. (A.3.18) cuja função é dada por Exp de diagonal 1 e $e^{(\pm\gamma\omega i)} = \cos \gamma\omega \pm i \sin \gamma\omega$. A abordagem a seguir é um pouco mais instrutiva, pois conduz ao resultado final de uma maneira mais direta. Iniciando pela definição da matriz exponencial:

$$\text{Exp}(\gamma\mathbf{\Omega}) = \mathbf{I} + \gamma\mathbf{\Omega} + \frac{\gamma^2}{2!}\mathbf{\Omega}^2 + \frac{\gamma^3}{3!}\mathbf{\Omega}^3 + \dots \quad (\text{A.7.2})$$

e utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, Eq. (A.3.20), para eliminar os termos de ordem superior a 3 em $\mathbf{\Omega}$:

$$\text{Exp}(\gamma\mathbf{\Omega}) = \mathbf{I} + \frac{\sin(\gamma\omega)}{\omega}\mathbf{\Omega} + \frac{1 - \cos(\gamma\omega)}{\omega^2}\mathbf{\Omega}^2 \quad (\text{A.7.3})$$

Comparando com a Eq. (A.4.7), a Eq. (A.7.3) requer $\gamma\omega = \theta$, ou isolando o fator de escala: $\gamma = \theta/\omega$. Introduzindo $\theta_i = \theta\omega_i/\omega$ e $\mathbf{\Theta} = \text{Rot}(\boldsymbol{\theta}) = \theta\mathbf{N} = (\theta/\omega)\mathbf{\Omega}$ como foi feito nas expressões (A.3.12) e (A.3.13), chega-se à:

$$\mathbf{R} = \text{Exp}(\mathbf{\Theta}) = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta}\mathbf{\Theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}\mathbf{\Theta}^2 = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta}\mathbf{\Theta} + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2}\mathbf{\Theta}^2 \quad (\text{A.7.4})$$

Substituindo $\mathbf{\Theta} = \theta\mathbf{N}$, é re-estabelecida a forma $\mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{N} + (1 - \cos \theta)\mathbf{N}^2$, como deveria de se esperar.

Esta representação tem algumas vantagens, a saber:

- É livre de singularidade;

- θ_i são exatamente proporcionais aos ângulos;
- A diferenciação é simplificada.

Devido à essas propriedades favoráveis, o mapa exponencial se tornou a implementação favorita onde ocorrem grandes rotações de estruturas, apesar da sua complexidade.

A.8 Relações de Matrizes Antissimétricas

As seguintes relações envolvendo os tensores de giro são úteis em algumas derivações. Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores contendo três componentes e $\mathbf{V} = \text{Rot}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{W} = \text{Rot}(\mathbf{w})$ os tensores de giro associados, $\mathbf{VW} - \mathbf{WV}$ é antissimétrico e:

$$\text{axial}(\mathbf{VW} - \mathbf{WV}) = \mathbf{V}\mathbf{w} - \mathbf{W}\mathbf{v} \quad (\text{A.8.1})$$

Seja \mathbf{Q} uma matriz não-singular 3×3 arbitrária enquanto que $\mathbf{W} = \text{Rot}(\mathbf{w})$ é antissimétrico. Pode-se verificar então que $\mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{Q}$ também é antissimétrico. Portanto,

$$\det(\mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{w} = \text{axial}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{Q}), \quad \det(\mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-T}\mathbf{w} = \text{axial}(\mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T) \quad (\text{A.8.2})$$

Se \mathbf{Q} é ortogonal, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ e $\det(\mathbf{Q}) = 1$, então:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{w} = \text{axial}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{Q}), \quad \mathbf{Q} \mathbf{w} = \text{axial}(\mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T) \quad (\text{A.8.3})$$

A forma inversa de $\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{W} + \beta \mathbf{W}^2$, em que $\mathbf{W} = \text{Rot}(\mathbf{w})$ é antissimétrico, é dada por:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I} + \frac{\alpha}{\alpha^2 w^2 + (\beta w^2 - 1)^2} \mathbf{W} + \frac{\alpha^2 + \beta(\beta w^2 - 1)}{\alpha^2 w^2 + (\beta w^2 - 1)^2} \mathbf{W}^2 \quad (\text{A.8.4a})$$

com

$$w^2 = \|\mathbf{w}\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \quad (\text{A.8.4b})$$

A.9 O Vetor Axial

A matriz Jacobiana $\mathbf{H}(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial \omega}$ definida pela Eq. (3.2.37) e sua forma inversa aparecem na formulação EICR. Essa relação foi derivada por Nour-Omid e Rankin [71] e dada por:

$$\mathbf{H}(\theta)^{-1} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\Theta} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\Theta}^2 \quad (\text{A.9.1})$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\theta) &= \frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta} + \eta\boldsymbol{\Theta}, \quad \text{com} \quad \eta = \frac{1 - \frac{1}{2}\theta \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{720}\theta^2 + \frac{1}{30204}\theta^4 + \frac{1}{1209600}\theta^6 + \dots\end{aligned}\quad (\text{A.9.2})$$

Para a obtenção da matriz de rigidez tangente, a derivada de $\mathbf{H}(\theta)^T$ contraída com o vetor momento \mathbf{m} é necessária:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\theta, \mathbf{m}) &= \frac{\partial \mathbf{H}(\theta)^T}{\partial \omega} : \mathbf{m} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mathbf{H}(\theta)^T \mathbf{m} \right] \mathbf{H}(\theta) \\ &= \left\{ \eta \left[(\theta^T \mathbf{m}) \mathbf{I} + \theta \mathbf{m}^T - 2\mathbf{m} \theta^T \right] + \mu \boldsymbol{\Theta}^2 \mathbf{m} \theta^T - \frac{1}{2} \text{Rot}(\mathbf{m}) \right\} \mathbf{H}(\theta)\end{aligned}\quad (\text{A.9.3a})$$

em que

$$\mu = \frac{\frac{d\eta}{d\theta}}{\theta} = \frac{\theta^2 + 4 \cos \theta + \theta \sin \theta - 4}{4\theta^4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{360} + \frac{1}{7560}\theta^2 + \frac{1}{201600}\theta^4 + \frac{1}{5987520}\theta^6 + \dots\quad (\text{A.9.3b})$$

A.10 A Matriz $\bar{\mathbf{S}}$

Esta é uma matriz 18×3 que é dada em sua forma transposta por:

$$\bar{\mathbf{S}} = \left[-\text{Rot}(\bar{\mathbf{x}}_1) \quad \mathbf{I} \quad -\text{Rot}(\bar{\mathbf{x}}_2) \quad \mathbf{I} \quad -\text{Rot}(\bar{\mathbf{x}}_3) \quad \mathbf{I} \right]^T \quad (\text{A.10.1})$$

em que \mathbf{I} representa a matriz identidade 3×3 e $\bar{\mathbf{x}}_a = [\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a]^T$ é o vetor posição do nó a na configuração deformada, medida a partir do sistema de eixos coordenados corrotacionado.

Apêndice B

Os Projetores

B.1 Introdução

Conforme foi exposto nos Capítulos 2 e 3, os projetores da formulação corrotacional EICR surgiram da necessidade de uma relação entre os deslocamentos totais e deformacionais de um ponto discreto qualquer em um elemento de casca. Esses projetores são o projetor $\bar{\mathbf{P}}$, que age nos graus de liberdade translacionais, e o projetor \mathbf{H} , que age nos graus de liberdade rotacionais. Neste apêndice, o intuito é mostrar esses projetores que foram apresentados inicialmente em notação compacta em forma expandida.

B.2 O Projetor $\bar{\mathbf{P}}$

Lembrando que o projetor $\bar{\mathbf{P}}$ opera somente nas translações, quando este projetor for inserido no contexto da formulação corrotacional EICR, os graus de liberdade rotacionais também serão avaliados, entretanto, serão inalterados. Assim, o projetor $\bar{\mathbf{P}}$ é construído para o nó a , que possui 6 GDL, em uma matriz 18×18 conforme já foi descrito pela Eq. 4.5.14 da seguinte maneira:

$$\bar{\mathbf{P}} = \text{diag}[\mathbf{I}] - \bar{\mathbf{P}}_u - \bar{\mathbf{P}}_\omega \quad (\text{B.2.1})$$

Para o elemento triangular de casca de três nós proposto nesta tese, a parcela $\text{diag}[\mathbf{I}]$ nada mais é do que uma matriz 18×18 cuja diagonal principal é composta por 1 e todos os outros elementos são nulos.

A matriz $\bar{\mathbf{P}}_u$ é dada em função do número total de nós da estrutura N . Dessa forma:

$$\bar{\mathbf{P}}_u = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.2})$$

A montagem da matriz $\bar{\mathbf{P}}_\omega$ é feita a partir de submatrizes 6×6 , de tal maneira que:

$$\bar{\mathbf{P}}_\omega = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|32)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|13)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|21)} \\ \bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|32)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|13)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|21)} \\ \bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|32)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|13)} & \bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|21)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3a})$$

em que

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|32)} = \begin{bmatrix} -y_1 \frac{x_{32}}{2} & y_1 \frac{y_{32}}{2} & z_1 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_1 \frac{x_{32}}{2} & -x_1 \frac{y_{32}}{2} & -z_1 x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 x_{32} - x_1 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & -\frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3b})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|13)} = \begin{bmatrix} -y_1 \frac{x_{13}}{2} & y_1 \frac{y_{13}}{2} & z_1 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_1 \frac{x_{13}}{2} & -x_1 \frac{y_{13}}{2} & -z_1 x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 x_{13} - x_1 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & -\frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3c})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(1|21)} = \begin{bmatrix} -y_1 \frac{x_{21}}{2} & y_1 \frac{y_{21}}{2} & z_1 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ x_1 \frac{x_{21}}{2} & -x_1 \frac{y_{21}}{2} & -z_1 x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 x_{21} - x_1 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & -\frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3d})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|32)} = \begin{bmatrix} -y_2 \frac{x_{32}}{2} & y_2 \frac{y_{32}}{2} & z_2 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_2 \frac{x_{32}}{2} & -x_2 \frac{y_{32}}{2} & -z_2 x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 x_{32} - x_2 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & -\frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3e})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|13)} = \begin{bmatrix} -y_2 \frac{x_{13}}{2} & y_2 \frac{y_{13}}{2} & z_2 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_2 \frac{x_{13}}{2} & -x_2 \frac{y_{13}}{2} & -z_2 x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 x_{13} - x_2 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & -\frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3f})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(2|21)} = \begin{bmatrix} -y_2 \frac{x_{21}}{2} & y_2 \frac{y_{21}}{2} & z_2 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ x_2 \frac{x_{21}}{2} & -x_2 \frac{y_{21}}{2} & -z_2 x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 x_{21} - x_2 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & -\frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3g})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|32)} = \begin{bmatrix} -y_3 \frac{x_{32}}{2} & y_3 \frac{y_{32}}{2} & z_3 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_3 \frac{x_{32}}{2} & -x_3 \frac{y_{32}}{2} & -z_3 x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 x_{32} - x_3 y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & -\frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3h})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|13)} = \begin{bmatrix} -y_3 \frac{x_{13}}{2} & y_3 \frac{y_{13}}{2} & z_3 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ x_3 \frac{x_{13}}{2} & -x_3 \frac{y_{13}}{2} & -z_3 x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 x_{13} - x_3 y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & -\frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3i})$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{\omega(3|21)} = \begin{bmatrix} -y_3 \frac{x_{21}}{2} & y_3 \frac{y_{21}}{2} & z_3 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ x_3 \frac{x_{21}}{2} & -x_3 \frac{y_{21}}{2} & -z_3 x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 x_{21} - x_3 y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & -\frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3j})$$

B.3 O Projetor H

Da mesma forma que o projetor $\bar{\mathbf{P}}$ que atuou nos GDL translacionais e manteve inalterado os GDL rotacionais, o projetor \mathbf{H} irá atuar nos GDL rotacionais sem alterar os GDL translacionais. Com isso, aplicando a definição desse projetor dada pela Eq. 4.4.3, ou seja:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \bar{\mathbf{d}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1a})$$

sendo \mathbf{H}_{ij} submatrizes 6×6 cujos valores podem ser computados da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1b})$$

$$\mathbf{H}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1c})$$

$$\mathbf{H}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1d})$$

$$\mathbf{H}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1e})$$

e

$$\mathbf{H}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.1f})$$

Assim, substituindo (B.3.1b)-(B.3.1f) em (B.3.1a), obtém-se a expressão para o projetor \mathbf{H} , isto é:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{21} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{32}}{2} & \frac{y_{32}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{13}}{2} & \frac{y_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_{21}}{2} & \frac{y_{21}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3.2})$$

Observação B.1. Os projetores $\tilde{\mathbf{P}}$ e \mathbf{H} foram construídos em coordenadas locais.

Observação B.2. Os valores $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots$ se referem às coordenadas x, y e z nos nós 1, 2 e 3. Os valores $x_{13}, y_{13}, x_{21}, y_{21}, x_{32}$ e y_{32} são as coordendas $x - y$ dos lados $\overline{13}, \overline{21}$ e $\overline{32}$, respectivamente, do triângulo (qualquer dúvida, ver Fig. 4.4).

Método do Comprimento de Arco

C.1 Introdução

Antes da metade dos anos 70, problemas estruturais de não-linearidade geométrica eram geralmente tratados como métodos puramente incrementais sob controle de carga. Esses métodos têm a desvantagem de desviar a solução da trajetória de equilíbrio. O erro de desvio, neste caso, é dependente do passo de carga e frequentemente é cumulativo durante a análise, tanto que requer um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa. Essa dificuldade motivou o desenvolvimento de métodos incrementais/iterativos, em que os incrementos foram seguidos pelas iterações de correção do equilíbrio. Essas iterações trazem a solução de volta para a trajetória de equilíbrio, quando a fase iterativa converge, de modo que o desvio da solução é eliminado. Assim, a trajetória de equilíbrio calculada é independente do incremento do passo de carga.

Estruturas geometricamente não-lineares usualmente alcançam um nível de carga máximo, em que são incapazes de resistir a mais incrementos de carga, até que uma significativa mudança geométrica ocorre. Tais estados são chamados de pontos críticos, e são geralmente caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular. Os pontos críticos podem ser classificados em pontos limite e pontos de bifurcação. Se a rigidez tangente for singular, mas a trajetória de equilíbrio estiver ainda traçando uma curva suave, o ponto crítico é um ponto limite. Se a trajetória estável, depois do ponto crítico, tiver uma mudança abrupta na direção da tangente, então o ponto crítico é chamado de ponto de bifurcação.

Uma vez detectado o ponto crítico, o que é muito importante na análise de estabilidade de estruturas, duas situações diferentes devem ser consideradas. Primeiro, se o ponto crítico for um ponto limite, o objetivo é atravessá-lo e seguir na mesma trajetória. Segundo, se o ponto crítico for um ponto de bifurcação, deve-se usar um algoritmo capaz de seguir na trajetória secundária de equilíbrio, se este for um objetivo fisicamente justificado.

A necessidade de atravessar um ponto crítico é devida ao fato de que, em certos

casos, a estrutura possui capacidade residual de carga que pode ser aproveitada. Existem na literatura diferentes estratégias capazes de atravessar um ponto crítico e permitir a continuação da resposta, tais como: controle de carga, controle de deslocamentos e controle de comprimento de arco.

Na estratégia de controle de carga, o parâmetro de carga λ é fixado em certo valor e apenas os deslocamentos variam durante o processo iterativo, assim, $\Delta\lambda = 0$. Nesse caso, o controle de carga pode fazer com que não se intercepte a curva carga deslocamento, pois a carga constante pode estar acima da trajetória de equilíbrio ou jamais ser alcançada pelos deslocamentos prescritos, ou então a estrutura pode não suportar um incremento de carga adicional, e assim, o processo iterativo diverge. As estratégias mais eficazes são as de controle de deslocamentos e as de controle de comprimento de arco.

Na estratégia de controle de deslocamentos inicialmente proposta por Simons *et al.* [96], o parâmetro de carga λ é calculado para um incremento fixo de deslocamentos. O procedimento consiste em se impor um incremento positivo de deslocamento, para um grau de liberdade selecionado, e então o nível de cargas aplicadas é determinado através das condições de equilíbrio.

No caso das estratégias de comprimento de arco, estas foram originalmente propostas Wempner [111], sendo mais tarde refinadas por vários autores. Nas várias adaptações do método de comprimento de arco, o parâmetro de carga λ varia como uma função do incremento dos deslocamentos. Segundo Haugen [39], nenhuma dessas estratégias é aplicável a todos os problemas. Porém, os algoritmos do tipo comprimento de arco são geralmente considerados os mais versáteis para ultrapassar os pontos limite, em termos de alcance de problemas que eles podem resolver.

A seguir, é apresentada a equação de governo para a obtenção da resposta (equação residual), e na sequência é apresentado o método de comprimento de arco, inicialmente em sua formulação geral, e depois privilegiando cada uma das fases do algoritmo: a fase preditora (formulações contínua e discreta) e a fase corretora (formulação discreta).

C.2 Formulação

O método do comprimento de arco é uma estratégia de solução na qual se busca a trajetória de equilíbrio por processos iterativos (com $\Delta v \neq 0$ e $\Delta\lambda \neq 0$), seguindo-se uma direção ortogonal à tangente da curva s (carga x deslocamentos) traçada por esta trajetória, onde a convergência é obtida para um determinado passo de carga. O método consiste em se adotar uma equação de restrição que é somada ao sistema de equações de equilíbrio, descrevendo-se um sistema aumentado de equações, ver Fig. C.1(a). Há duas fases de processamento neste método: a fase preditora e a fase corretora. Em cada uma delas se adota uma equação de restrição independente. A estratégia adotada neste método evita o que

ocorre com os métodos incrementais que não interceptam a curva carga \times deslocamento para um dado fator de carga $\lambda = \text{constante}$ ou para deslocamentos prescritos, conforme ilustra a Fig. C.1(b).

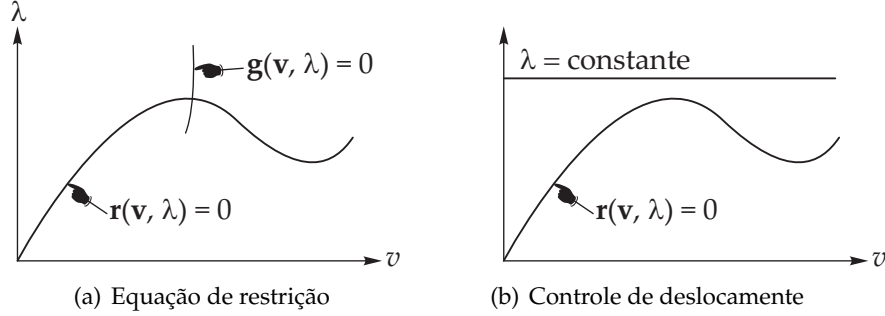


Figura C.1: Trajetórias de equilíbrio para os deslocamentos segundo o passo de carga.

Com isso, o resíduo pode ser obtido a partir de:

$$\mathbf{r}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.1})$$

em que \mathbf{v} representa o vetor que contém os deslocamentos, \mathbf{f} e \mathbf{p} são os vetores de forças internas e externas, respectivamente, e $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{0}$ é uma equação de restrição.

Inicialmente, é necessário linearizar a Eq. C.2.1, dessa forma:

$$\mathbf{r}^{k+1}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda) + \frac{\partial \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} \Delta \lambda = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.2a})$$

$$\mathbf{g}^{k+1}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda) + \frac{\partial \mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} \Delta \lambda = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.2b})$$

Resolvendo a segunda e a terceira parcelas da Eq. (C.2.2a), tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} = \frac{\partial [\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{p}]}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{K} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} \Delta \lambda = \frac{\partial [\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{p}]}{\partial \lambda} = \frac{\partial (-\lambda \mathbf{p})}{\partial \lambda} = -\mathbf{p} \quad (\text{C.2.3})$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente.

Substituindo (C.2.3) em (C.2.2a) e (C.2.2b), pode-se chegar à:

$$\mathbf{r}^{k+1}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{K} \Delta \mathbf{v} - \mathbf{p} \Delta \lambda \quad (\text{C.2.4a})$$

$$\mathbf{g}^{k+1}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{g}_v \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g}_\lambda \Delta \lambda \quad (\text{C.2.4b})$$

Passando $\mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda)$ e $\mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda)$ para o lado direito da igualdade, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \Delta \mathbf{v} - \mathbf{p} \Delta \lambda = -\mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda) \\ \mathbf{g}_v \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}_\lambda \Delta \lambda = -\mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda) \end{cases} \quad (\text{C.2.5})$$

A Eq. (C.2.5) pode ser escrita em sua forma matricial, o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{p} \\ \mathbf{g}_v & \mathbf{g}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}^k(\mathbf{v}, \lambda) \\ \mathbf{g}^k(\mathbf{v}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.6})$$

Com isso, para a iteração $i + 1$, dentro do mesmo passo incremental k , a primeira linha da Eq. (C.2.6), após o rearranjo dos termos, fica:

$$\Delta \mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \Delta \lambda^{i+1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r} \quad (\text{C.2.7})$$

Definindo,

$$\Delta \mathbf{v}_p^{i+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{v}_r^{i+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{r} \quad (\text{C.2.8})$$

como a variação dos deslocamentos em função apenas do vetor das forças internas e do vetor das forças residuais, respectivamente, a Eq. (C.2.7) fica:

$$\Delta \mathbf{v}^{i+1} = \Delta \mathbf{v}_p^{i+1} \Delta \lambda^{i+1} - \Delta \mathbf{v}_r^{i+1} \quad (\text{C.2.9})$$

Analogamente, para a segunda linha da Eq. (C.2.6), obtém-se:

$$\mathbf{g}_v \Delta \mathbf{v}^{i+1} + \mathbf{g}_\lambda \Delta \lambda^{i+1} = -\mathbf{g} \quad (\text{C.2.10})$$

Substituindo (C.2.9) em (C.2.10) e rearranjando os termos, chega-se à:

$$\Delta \lambda^{i+1} = \frac{-\mathbf{g}^{i+1} - \mathbf{g}_v^{i+1} \Delta \mathbf{v}_r^{i+1}}{\mathbf{g}_v^{i+1} \Delta \mathbf{v}_p^{i+1} + \mathbf{g}_\lambda^{i+1}} \quad (\text{C.2.11})$$

que é a variação do parâmetro de carga na iteração $i + 1$.

C.2.1 Fase Preditora

Formulação Discreta

O sistema aumentado da Eq. (C.2.1) possui $n + 1$ variáveis independentes, em que n representa os graus de liberdade contidos no vetor \mathbf{v} e 1 se refere ao parâmetro de carga λ . Assim, o espaço a ser trabalhado é de $n + 1$ dimensões. Essas variáveis podem ser parametrizadas como uma função da curva s ao longo da resposta carga \times deslocamentos da estrutura. Desse modo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ e $\lambda = \lambda(s)$.

Considerando o vetor $\hat{\mathbf{t}}$, tangente à curva s , tem-se:

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.12})$$

em que:

$$\dot{\mathbf{v}} \approx \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta s} \quad \text{e} \quad \dot{\lambda} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta s} \quad (\text{C.2.13})$$

onde Δs é o incremento do comprimento de arco.

A primeira derivada da equação de equilíbrio em relação à curva s é dada por:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{ds} - \mathbf{p} \frac{d\lambda}{ds} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{p}\dot{\lambda} \quad (\text{C.2.14})$$

Usando a definição da Eq. (C.2.13), a Eq. (C.2.14) pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta s} - \mathbf{p} \frac{\Delta \lambda}{\Delta s} = \mathbf{K}\Delta \mathbf{v} - \mathbf{p}\Delta \lambda = \mathbf{0} \quad (\text{C.2.15})$$

Como o vetor $\hat{\mathbf{t}}$ é unitário, após algum algebrismo chega-se à:

$$\Delta \lambda = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \mathbf{v}_p^T \Delta \mathbf{v}_p}} \quad (\text{C.2.16})$$

O sinal a ser escolhido para a Eq. (C.2.16) é determinado da seguinte maneira:

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \lambda \Delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v}_p > 0 \quad (\text{C.2.17})$$

em que $\bar{\mathbf{v}}^T$ é a variação dos deslocamentos referentes ao passo de carga precedente.

Assim, se $\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{v}_p < 0$, então $\Delta \lambda < 0$, caso contrário $\Delta \lambda > 0$.

Observação C.1. Nesta tese, a estimativa inicial para o comprimento de arco Δs foi entre $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{5}$.

C.2.2 Fase Corretora

Neste momento, deve ser definida a equação de restrição da fase corretora. A Fig. C.2 ilustra a interpretação geométrica das equações de restrição das fases preditora e corretora. Para um determinado incremento de carga $\Delta \lambda_i$, tem-se o vetor $\mathbf{a}_i = (\Delta \mathbf{v}_i, \Delta \lambda_i)$, cujo módulo define o comprimento de arco Δs atualizado; quando $i = 0$, o módulo de \mathbf{a}_0 define o comprimento de arco oriundo da fase preditora e, consequentemente, $\Delta \mathbf{v}_0$ e $\Delta \lambda_0$ são as variações dos deslocamentos e do parâmetro de carga oriundos da fase preditora, respectivamente.

Definindo a equação de restrição da fase corretora como sendo um hiperplano nor-

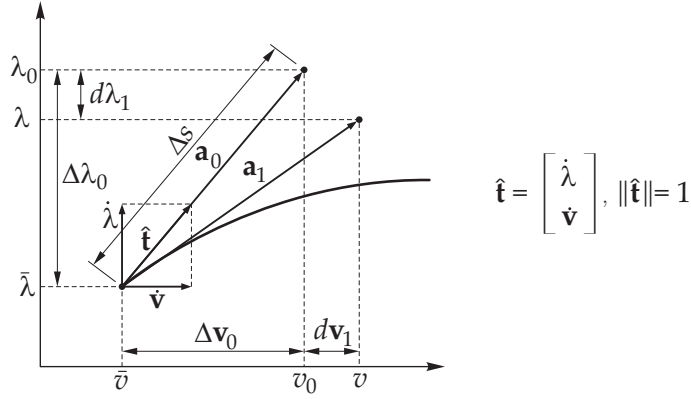


Figura C.2: Ilustração geométrica do método do comprimento de arco.

mal, e considerando-se que $\mathbf{a}_{i+1} = (d\mathbf{v}_{i+1}, d\lambda_{i+1})$ é o vetor das variações dos deslocamentos e das cargas incrementais, a seguinte relação é válida:

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{a}}_{i+1} = 0 \quad (\text{C.2.18})$$

a qual representa a equação do hiperplano normal atualizado, mas nada mais é do que o produto entre os vetores posição do comprimento de arco $\Delta \mathbf{s}$ e o vetor $\hat{\mathbf{x}}$ (que representa a correção) pertencente ao referido hiperplano. Sendo o produto interno da Eq. (C.2.18) é nulo, isso implica que os referidos vetores são ortogonais entre si. Assim, a equação do hiperplano pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \lambda) = \langle \Delta \mathbf{v}_i^T, \Delta \lambda_i \rangle \langle d\mathbf{v}_{i+1}, d\lambda_{i+1} \rangle = 0 \quad (\text{C.2.19})$$

Substituindo (C.2.19) em (C.2.6), na qual a incógnita é o vetor das variações dos deslocamentos e do parâmetro de carga, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{v}_i & \Delta \lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{v}_{i+1} \\ d\lambda_{i+1} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(\mathbf{v}, \lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.20})$$

Da primeira linha da matriz da pela Eq. (C.2.20), tem-se:

$$d\mathbf{v}_{i+1} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{r}_i + d\lambda_{i+1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (\text{C.2.21})$$

Aplicando as definições dadas por (C.2.8) em (C.2.21), obtém-se:

$$d\mathbf{v}_{i+1} = d\mathbf{v}_{\mathbf{r}(i+1)} + d\lambda_{i+1} d\mathbf{v}_{\mathbf{p}(i+1)} \quad (\text{C.2.22})$$

Substituindo a Eq. (C.2.22) na segunda linha da matriz dada por (C.2.20) e rearran-

jando os termos, chega-se à:

$$d\lambda_{i+1} = - \frac{\Delta \mathbf{v}_i^T d\mathbf{v}_{\mathbf{r}(i+1)}}{\Delta \mathbf{v}_i^T d\mathbf{v}_{\mathbf{p}(i+1)} + \Delta \lambda_i} \quad (\text{C.2.23})$$

Na fase corretora, as atualizações dos incrementos de cargas e dos deslocamentos são dadas pelas seguintes relações, respectivamente:

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i + d\lambda_{i+1} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{i+1} = \Delta \mathbf{v}_i + d\mathbf{v}_{i+1} \quad (\text{C.2.24})$$

Na Eq. (C.2.24), quando $i = 0$, tem-se $\Delta \lambda$ e $\Delta \mathbf{v}$ oriundos da fase preditora; $d\lambda_{i+1}$ e $d\mathbf{v}_{i+1}$ são as variações dos incrementos de carga e dos deslocamentos, respectivamente, para as $(i + 1)$ iterações efetuadas no incremento.

Após a convergência do passo de carga $k + 1$, são atualizados o parâmetro de carga e o vetor dos deslocamentos totais, respectivamente:

$$\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda_{i+1} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_{i+1} \quad (\text{C.2.25})$$

Observação C.2. Segundo Felippa e seus colaboradores [31, 33], um problema ao se utilizar o método do comprimento de arco é o *doubling-back* que é o fenômeno que ocorre quando a solução do algoritmo volta a locar um ponto sobre a trajetória de equilíbrio já traçada nas iterações prévias. Isso pode ocorrer caso não se escolha a raiz adequada para a variação do parâmetro de carga, quando se chega a uma situação de *snap-back* (mudança de direção brusca da trajetória de equilíbrio).

Índice Remissivo

Campo de deslocamentos, 13, 38, 114

Configuração, 12

Deformação, 11

mapeamento, 12

cisalhante no plano, 22

cisalhante transversal, 22

gradiente de, 89

homogênea, 16, 18

isocórica, 16

medidas de, 20

não-homogênea, 16

normal no plano, 22

normal transversal, 22

Descrição

Corrotacional, 41, 43

Lagrangeana, 6

Lagrangeana Atualizada, 9, 41

Lagrangeana Total, 9, 41

Elasticidade, 11, 37

Energia de deformação, 90

Equação

de equilíbrio, 74

Equilíbrio, 33, 103, 107, 114

de rotação, 35

de translação, 33

Formulação

equilibrada simetrizável consistente, 10

ANDES, 6

Corrotacional, 4

de elemento independente, 5

livre, 6

livre estendida, 6

Função

de deformação, 13

Gradiente

de deformação, 14–16, 19, 21, 22, 25, 26,

31, 37, 91, 92, 97, 98, 117

térmico, 148

Hiperelasticidade, 37, 87

Histórico

da análise não-linear via MEF, 3

da formulação corrotacional, 4

Incompressibilidade, 102

Invariantes, 100

Linearização, 25, 26, 115

Métodos

Aproximados, 1

de Newton, 3

de Newton-Raphson, 4

de Newton-Raphson modificado, 4

Matriz

braço de alavanca, 52

correção de giro, 53

de projeção rotacional, 54

- de projeção translacional, 52
- de rigidez geométrica de correção de momento, 63
- de rigidez geométrica rotacional, 61
- de rigidez linear, 78
- de rigidez material, 61
- de rigidez tangente, 60, 84
- de rigidez tangente, propriedades, 65
- de rotação, 46–48, 51, 91

Mecânica

- Aplicada, 1
- Computacional, 1
- do Contínuo, 2, 4, 11, 17, 23, 42
- Teórica, 1

Micromecânica, 2

Movimento

- de um corpo, 11

Nanomecânica, 2

Projetores, 5, 171

Tensão, 26

Tensor

- de Cauchy-Green à direita, 18, 89
- de Cauchy-Green à esquerda, 18
- de deformação de Green, 7
- de elasticidade, 39
- de Piola-kirchhoff, 1º, 31
- de Piola-kirchhoff, 2º, 31
- de projeção, 81
- de tensões de Cauchy, 26, 28, 29